Corso di Laurea in Matematica - Geometria 1 – Corso B

Foglio di esercizi n. 3 (da consegnare giovedì 29/3) - A.A. 2011-12

Cognome ______________________ Nome ______________________

Esercizio 1

In $\mathbb{R}^{2,2}$ consideriamo il sottoinsieme

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

a) Mostrare che U è un sottospazio vettoriale.

b) Determinare la dimensione e una base dei sottospazi U, $S(\mathbb{R}^{2,2})$, $U \cap S(\mathbb{R}^{2,2})$ e $U + S(\mathbb{R}^{2,2})$, dove $S(\mathbb{R}^{2,2})$ è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche.

Esercizio 2

Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori di $\mathbb{R}^n$. Mostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

(i) $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||$ (cioè vale uguaglianza nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

(ii) $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti

(iii) l'angolo tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è 0 o π (oppure uno dei due vettori è nullo).

Esercizio 3

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$.

a) Mostrare che V contiene infiniti elementi se e solo se $\mathbb{K}$ contiene infiniti elementi.

b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ con p numero primo, quanti elementi contiene V?