

Corso di Laurea in Matematica - Geometria 1 – Corso B

Foglio di esercizi n. 4 (da consegnare MERCOLEDÌ 4/4 a lezione) - A.A. 2011-12

Cognome _____ Nome _____

Esercizio 1

Nello spazio vettoriale V_3 , rispetto ad una base ortonormale positiva, si consideri il vettore $u = (1, 0, 1)$.

- a) Determinare tutti i vettori x di \mathbb{R}^3 ortogonali ad u , aventi norma pari a 2 e formanti un angolo convesso $\theta = \pi/4$ con il vettore $v = (1, 1, 0)$.
- b) Trovare una base di \mathbb{R}^3 contenente i vettori u e v e calcolare le componenti del vettore $w = (1, 2, 1)$ rispetto a tale base.

Esercizio 2

a) Dimostrare che esiste ed è un'unica l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ tale che:

$$f((1, 1, 0)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f((1, -1, 2)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f((0, 0, 1)) = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Determinare la dimensione e una base di $\ker f$ e $\operatorname{im} f$.

c) Calcolare $f((3, 1, -1))$.

d) Determinare una base e la dimensione di $f^{-1}(S)$, dove S è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$ delle matrici simmetriche.

Esercizio 3

Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui A è invertibile e scrivere A^{-1} in questi casi.

Esercizio 4

Discutere e risolvere il seguente sistema, al variare del parametro reale h :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + hx_4 = 0 \\ -x_1 + (h - 2)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + hx_4 = 0 \end{cases}$$