Corso di Laurea in Matematica - Geometria 1 – Corso B - A.A. 2011-12

Foglio di esercizi n. 5 (vacanze di Pasqua), da consegnare giovedì 12/4

Cognome ______________________ Nome ______________________

Esercizio 1

Sia $S(\mathbb{R}^{3,3})$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche reali di ordine 3, e consideriamo il sottoinsieme:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \in S(\mathbb{R}^{3,3}) \,|\, x_1 + 2x_4 - x_6 = -x_2 + 2x_6 = x_3 + 3x_5 = 0 \right\}.$$

a) Verificare che W è un sottospazio vettoriale di $S(\mathbb{R}^{3,3})$ e determinarne la dimensione e una base.

b) Determinare la dimensione e una base di un sottospazio vettoriale U di $S(\mathbb{R}^{3,3})$ supplementare di W.

c) Decomporre la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

nella somma di una matrice di W e di una matrice di U.

Esercizio 2

Sia h un parametro reale e $f\colon \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ l'applicazione data da:

$$f(a_2t^2 + a_1t + a_0) = (2a_2 - 3a_1 + a_0)t^3 + (ha_2 + 4a_1 - 2a_0)t^2 + (a_1 + a_0)t + 2a_1 - a_2.$$

a) Mostrare che f è lineare.

b) Scelte delle basi per $\mathbb{R}_2[t]$ e $\mathbb{R}_3[t]$, scrivere la matrice associata a f rispetto a tali basi.

c) Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, una base per $\ker f$ e $\operatorname{im} f$, e stabilire se f è iniettiva o suriettiva.

d) Posto $h = -3$ e $W := \mathcal{L}(t^2 + 1, t^2 + t, -2t^3 + 3t^2 + 1) \subseteq \mathbb{R}_3[t]$, trovare una base per ciascuno dei seguenti sottospazi: $f^{-1}(W)$, $\operatorname{im} f \cap W$ e $\operatorname{im} f + W$.

Esercizio 3

Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 6 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4

Determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{C}$, il rango della seguente matrice a elementi complessi:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 1 \\ 3 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5

Consideriamo le seguenti rette in $\mathbb{R}^2$:

$$r_1 : \quad ax + 2y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad r_2 : \quad x + y - c = 0,$$

dove a e c sono parametri reali. Determinare per quali valori dei parametri le due rette sono:

a) incidenti;

b) parallele non coincidenti;

c) coincidenti;

d) ortogonali.