Corso di Laurea in Matematica - Geometria 1 – Corso B - A.A. 2011-12

Foglio di esercizi n. 7, da consegnare giovedì 26/4

Cognome ________________________ Nome ________________________

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$.

a) Mostrare che l'applicazione
$$\mathrm{tr}\colon \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathbb{K},$$
che associa ad ogni endomorfismo la sua traccia, è lineare.

b) Sia $W \subseteq \mathrm{End}(V)$ l'insieme degli endomorfismi a traccia nulla. Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$.

c) Poniamo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $V = \mathbb{C}^2$. Scrivere una base di $\mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ e del sottospazio W.

Esercizio 2

Consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

a) Mostrare che $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

b) Scrivere la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$.

c) Scrivere le coordinate del vettore $\underline{w}$ nella base $\mathcal{B}$.

d) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $f(\underline{x}) = A\underline{x}$, dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scrivere la matrice C associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

e) Scrivere la matrice $M \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ tale che $C = MAM^{-1}$.

Esercizio 3

Consideriamo le seguenti due basi di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,1),(1,0)\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{(4,3),(3,2)\}.$$

a) Scrivere le equazioni del cambiamento di base da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$, cioè: dette $\underline{x}_1$ le coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^2$ rispetto a $\mathcal{B}_1$, e $\underline{x}_2$ le coordinate dello stesso vettore rispetto a $\mathcal{B}_2$, scrivere le equazioni che determinano $\underline{x}_2$ dato $\underline{x}_1$.

b) Siano: Q la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$; P la matrice del cambiamento di base dalla base canonica a $\mathcal{B}_1$; R la matrice del cambiamento di base dalla base canonica a $\mathcal{B}_2$. Determinare la relazione che intercorre tra le matrici Q, P ed R.

Esercizio 4

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n, e consideriamo due basi $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ di V. Sia $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Diciamo che $\mathcal{B}'$ è *equiorientata* con $\mathcal{B}$ se $\det M > 0$.

a) Mostrare che essere equiorientate è una relazione di equivalenza sull'insieme di tutte le basi di V.

b) Mostrare che nell'insieme di tutte le basi di V esistono esattamente due classi di equivalenza rispetto a questa relazione.

c) Poniamo $V = \mathbb{R}^n$, e sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Mostrare che $\mathcal{B}$ è una base positiva (nel senso che $\det[\, \underline{v}_1 \,|\, \cdots \,|\, \underline{v}_n \,] > 0$) se e solo se $\mathcal{B}$ è equiorientata con la base canonica.