Corso di Laurea in Matematica - Geometria 1 – Corso B - A.A. 2011-12

Foglio di esercizi n. 8, da consegnare giovedì 4/5

Cognome ________________________ Nome ________________________

Esercizio 1

Data la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 & -1+a \\ -3 & 5 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

1) determinare per quali valori del parametro a la matrice M ammette l'autovalore $\lambda = 1$.

2) Posto $a = 0$, la matrice M è diagonalizzabile?

Esercizio 2

Consideriamo l'applicazione $f\colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ così definita:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 17x_2 + 10x_3 + 9x_4 & x_2 \\ 11x_2 + 8x_3 + 6x_4 & -13x_2 - 8x_3 - 6x_4 \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che f è un endomorfismo e determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$.

b) Determinare la dimensione e una base di $\ker f$ e di $\operatorname{im} f$.

c) Determinare la dimensione e una base di $f(H)$, dove H è il sottospazio:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \,|\, 4x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

d) Determinare la dimensione e una base di $f^{-1}(K)$, dove K è il sottospazio:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \,|\, y_1 + y_4 = y_3 = 0 \right\}.$$

e) Mostrare che f è diagonalizzabile.

f) Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^{2,2}$ composta da autovettori per f, e scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 3

Consideriamo l'operatore di derivazione:

$$d\colon \mathbb{R}_5[x] \to \mathbb{R}_5[x], \quad p(x) \mapsto p'(x),$$

che associa ad ogni polinomio la sua derivata prima.

a) Mostrare che d è un endomorfismo di $\mathbb{R}_5[x]$.

b) Dire se d è diagonalizzabile.

c) Determinare tutti gli autospazi di d.

Esercizio 4

In $\mathbb{R}^3$ sono dati il punto $A = (1, 2, -1)$ e i vettori $\underline{u} = (-1, 0, 2)$, $\underline{v} = (\sqrt{2}, \frac{1}{2}, -3)$. Determinare l'equazione del piano passante per A e parallelo ai vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$.

Esercizio 5

Sia S un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$, cioè un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ della forma

$$S = H + \underline{v}_0 = \{\underline{v} + \underline{v}_0 \,|\, \underline{v} \in H\},$$

dove H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

1. Mostrare che, per ogni $\underline{u}_0 \in S$, si ha $S = H + \underline{u}_0$.
2. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
   - (i) S è un sottospazio vettoriale;
   - (ii) S contiene il vettore nullo;
   - (iii) $S = H$;
   - (iv) $\underline{v_0} \in H$.