Corso di Laurea in Matematica - Geometria 1 – Corso B - A.A. 2011-12

Foglio di esercizi n. 10, da consegnare giovedì 17/5

Cognome ______________________ Nome ______________________

Esercizio 1

Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ -1 & h & -1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h, k \in \mathbb{R},$$

determinare per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.

Posto $h = 0$ e $k = 1$, spiegare perché A è diagonalizzabile, e trovare una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 2

Sia $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ una matrice simmetrica di rango 2 che ammette l'autovalore $\lambda = 2$, e sia

$$V_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

l'autospazio relativo a tale autovalore.

1. Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A.

2. Scrivere una matrice diagonale simile ad A.

Esercizio 3

Si considerino i punti $A = (1, 2, 1)$, $B = (1, 3, 1)$ e $C = (0, 2, 2)$ in $\mathbb{R}^3$.

1. Verificare che i punti A, B, C non sono allineati, calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C, e scrivere l'equazione del piano π passante per i tre punti.

2. Determinare la retta r passante per il punto A, contenuta nel piano π e perpendicolare alla retta

$$s : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2y + z = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la posizione reciproca delle rette:

$$r : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + ky + z = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}$$

Determinare il piano che le contiene in un caso in cui risultino complanari.

Esercizio 5

Attenzione: nei punti 1. e 2. di questo esercizio consideriamo l'insieme delle matrici complesse $\mathbb{C}^{2,2}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ invece che su $\mathbb{C}$.

1. Determinare la dimensione e una base di $\mathbb{C}^{2,2}$ come spazio vettoriale reale.
2. Sia $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^{2,2}$ il sottoinsieme delle matrici hermitiane, cioè delle matrici $A \in \mathbb{C}^{2,2}$ tali che $A = \overline{A}^t$. Mostrare che $\mathcal{H}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^{2,2}$ come spazio vettoriale reale, e determinarne la dimensione e una base.
3. Mostrare che, se invece consideriamo la struttura di spazio vettoriale complesso su $\mathbb{C}^{2,2}$, allora $\mathcal{H}$ non è un sottospazio vettoriale.