Corso di Laurea in Matematica - Geometria 1 – Corso B – A.A. 2011-12

Foglio di esercizi n. 11 – da consegnare giovedì 24/5

Cognome ______________________ Nome ______________________

Esercizio 1

In $\mathbb{R}^{n,n}$ siano $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$ il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche, e $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$ quello delle matrici antisimmetriche. Consideriamo su $\mathbb{R}^{n,n}$ il prodotto scalare standard $A \cdot B = tr(A^t B)$.
Mostrare che $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$ è il complemento ortogonale di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$ (questo dà una seconda dimostrazione del fatto che $\mathbb{R}^{n,n} = \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n}) \oplus \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$).

Esercizio 2

Sia φ la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata, rispetto alla base canonica, è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare due vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) \neq \varphi(\underline{y}, \underline{x})$.

b) Scrivere la matrice B associata a φ rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Spiegare la relazione tra le matrici A e B.

Esercizio 3

Consideriamo la matrice complessa:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Mostrare che M è diagonalizzabile.

b) Trovare, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ (rispetto al prodotto hermitiano standard) composta da autovettori di M.

Esercizio 4

Nello spazio, rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$, si considerino i tre piani:

$$\alpha : x + 2y + z - 1 = 0, \quad \beta : x + y + z - 3 = 0, \quad \gamma : x + hy + z + 1 = 0,$$

dove $h \in \mathbb{R}$, e sia r la retta $\alpha \cap \beta$.

a) Determinare i valori di h, se esistono, affinché il piano γ appartenga al fascio proprio dei piani contenenti la retta r, e per tali valori trovare dei parametri omogenei (λ, μ) che permettono di scrivere l'equazione del piano γ come combinazione lineare delle equazioni di α e di β.

b) Determinare h, se esiste, in modo tale che le rette r ed $s = \beta \cap \gamma$ siano parallele.

c) Determinare le coordinate del punto Q simmetrico di $P = (1, 0, 1)$ rispetto al piano α.

Esercizio 5

Consideriamo l'applicazione:

$$f\colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}, \quad A \mapsto A^t.$$

1. Verificare che f è un endomorfismo di $\mathbb{R}^{2,2}$.
2. Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$.
3. f è invertibile? In caso positivo, determinare la matrice associata a f^{-1} rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$.
4. f è diagonalizzabile? In caso positivo, scrivere una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ composta da autovettori di f e la matrice associata ad f rispetto a tale base.