Corso di Laurea in Matematica - Geometria 1 – Corso B – A.A. 2011-12

Foglio di esercizi n. 12 – da consegnare giovedì 31/5

Cognome ______________________ Nome ______________________

Esercizio 1

Consideriamo la forma quadratica su $\mathbb{C}^2$:

$$Q(x, y) = ix^2 - 2y^2.$$

a) Determinare una base di $\mathbb{C}^2$ tale che la matrice associata a Q sia la matrice identica.

b) Determinare il nucleo di Q e il sottoinsieme dei vettori isotropi.

Esercizio 2

Consideriamo la matrice simmetrica reale:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Scrivere l'espressione polinomiale della forma bilineare simmetrica φ su $\mathbb{R}^3$ di cui A è la matrice associata (rispetto alla base canonica), e determinarne la segnatura e il nucleo.

b) Sia Q la forma quadratica associata a φ. Determinare un vettore isotropo non nullo, un vettore su cui Q è positiva, e un vettore su cui Q è negativa.

c) Determinare la dimensione e una base del sottospazio vettoriale ortogonale (rispetto a φ) a $W = \mathcal{L}(e_1, e_1 + e_2 - e_3)$ (con (e_1, e_2, e_3) base canonica di $\mathbb{R}^3$).

d) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale Q si scrive in forma normale.

Esercizio 3

Sia φ la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & c \end{pmatrix},$$

dove a, b, c sono parametri reali. Determinare i valori di a, b, c per cui φ è un prodotto scalare.

Esercizio 4

Dire se le rette in $\mathbb{R}^3$:

$$r\colon \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad\qquad s\colon \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2t - 1 \\ z &= -1 + 3t \end{cases}$$

a) sono sghembe;

b) sono incidenti non ortogonali;

c) sono ortogonali non incidenti;

d) giacciono nel piano $z = 2y$.

Esercizio 5

Consideriamo i piani $\pi_1\colon x + y + z = 1$ e $\pi_2\colon x + 2y - z = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

1) Verificare che π_1 e π_2 si intersecano in una retta r.

2) Dire se esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui r è data da $(x, y, z) = (1 + at, 1 + bt, 1 + ct)$.

3) Dire se esistono $k, l, m \in \mathbb{R}$ per cui r è data da $(x, y, z) = (k - 3t, l + 2t, m + t)$.