

Cognome _____ Nome _____

Esercizio 1

Nello spazio ordinario rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, i, j, k)$, si consideri la circonferenza C di equazioni:

$$C: \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

1. Determinare il centro e il raggio di C .
2. Determinare la retta tangente alla circonferenza C nel punto $A = (1, 1, 1)$.
3. Determinare tutte le sfere che contengono C e che hanno raggio $R = 1$.
4. Determinare le sfere di raggio minimo che contengono C .

Esercizio 2

Dato $h \in \mathbb{R}$, si consideri la forma quadratica su \mathbb{R}^4 :

$$Q((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 2x_1^2 + 2(-x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 - 3x_2x_3 - x_2x_4 + hx_3x_4).$$

1. Determinare il parametro h in modo che il vettore $\underline{v} = (1, 1, 1, -1)$ sia isotropo. Per tale valore di h , determinare una base di $\ker \varphi$, dove φ è la forma bilineare simmetrica associata a Q .
2. Determinare la segnatura di Q e scrivere Q in forma normale.

Esercizio 3

Siano (V, \cdot) uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ una base ortonormale di V , e (x_1, x_2, x_3) le coordinate di un generico vettore di V rispetto alla base \mathcal{B} .

Sia $W \subset V$ il piano vettoriale di equazione $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, e consideriamo l'endomorfismo $p: V \rightarrow V$ dato dalla proiezione ortogonale su W .

1. Scrivere la matrice associata a p rispetto alla base \mathcal{B} .

2. Mostrare che la funzione:

$$Q: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(v) = v \cdot p(v)$$

è una forma quadratica su V .

3. Determinare la segnatura di Q e una base \mathcal{B}_2 di V tale che la matrice associata a Q rispetto a \mathcal{B}_2 sia diagonale.

Esercizio 4

In \mathbb{R}^2 è data la conica

$$C: 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x - y = 0.$$

Classificare e scrivere in forma canonica C , specificando le equazioni del cambiamento di riferimento. Trovare gli eventuali assi, vertici, centro e asintoti della conica.

Esercizio 5

Nel piano, rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O; x, y)$, è data la conica

$$C: 2x^2 + 2\sqrt{3}xy - 3 = 0.$$

Ridurre C a forma canonica e classificarla. Trovare gli eventuali assi, vertici, centro e asintoti della conica.