Corso di Laurea in Matematica - A.A. 2011/2012 – Esame di Geometria 1 - Corsi A e B
Prova di autovalutazione

1) Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$:

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,|\, p(1) = 0\}.$$

a) (2 punti) Mostrare che esiste ed è unica l'applicazione lineare $f\colon W \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$f(x^3 - 1) = (1, -1, 1), \quad f(x^2 - 1) = (-1, a, -1), \quad \text{e} \quad f(x - 1) = (3, 0, a),$$

dove $a \in \mathbb{R}$.

b) (3 punti) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, una base di $\ker f$ e di $\mathrm{Im} f$.

c) (3 punti) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, le controimmagini di $(0, 0, 1)$ tramite f, e una base di $f^{-1}(\mathcal{L}((0, 0, 1)))$.

2) i) (2 punti) Dimostrare che il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, a + d = 0 \right\}$$

coincide con il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{U}' = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

ii) (3 punti) Determinare le equazioni e una base del complemento ortogonale di $\mathcal{U}$ rispetto al prodotto scalare su $\mathbb{R}^{2,2}$ dato da $A \cdot B = \mathrm{tr}(A^t B)$.

3) Nello spazio, rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O; x, y, z)$, sono date le rette

$$r) \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ y + 2z + 5 = 0, \end{cases} \qquad s) \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -3t \\ z = t - 2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) (3 punti) Determinare il punto A di intersezione delle rette r ed s e l'equazione del piano π su cui giacciono le due rette.

b) (2 punti) Determinare l'equazione della sfera Σ tangente al piano π nel punto A ed avente centro sul piano di equazione $z = 1$.

c) (2 punti) Determinare il centro e il raggio della circonferenza data dall'intersezione di Σ con il piano $y + z = 1$.

4) Si consideri la forma quadratica Q su $\mathbb{R}^4$ definita da:

$$Q((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2.$$

a) (3 punti) Classificare Q e determinarne la segnatura.

b) (4 punti) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale Q si scrive in forma normale.

c) (3 punti) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ composta da vettori isotropi.

5) i) (2 punti) Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice tale che

$$A^2 - A - 2I = 0,$$

dove I è la matrice identica di ordine n. Mostrare che A è invertibile.

ii) (2 punti) Verificare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soddisfa la condizione precedente, e determinarne l'inversa.