Corso di Laurea in Matematica - A.A. 2011/2012 – Esame di Geometria 1 - Corsi A e B

Prova di autovalutazione - Soluzioni

1) a) Lo spazio vettoriale W ha dimensione 3, i vettori dati costituiscono una base di W e quindi per il Teorema Fondamentale delle Applicazioni Lineari esiste ed è unica l'applicazione lineare f.

(a) (3 punti) Per $a \neq 1, 3$ l'applicazione è biiettiva e come base di $\mathrm{Im} f$ si può scegliere la base canonica. Per $a = 3$ una base di $\ker f$ è $\big((x-1)(9x^2+12x+10)\big)$ e una base di $\mathrm{Im} f$ è $((1,-1,1),(3,0,3))$. Per $a = 1$ una base di $\ker f$ è $\big((x-1)(x^2+2x+2)\big)$ e una base di $\mathrm{Im} f$ è $((1,-1,1),(3,0,1))$.

(b) (3 punti) Il vettore $(0,0,1)$ non ha controimmagine per $a = 1, 3$, mentre per $a \neq 1, 3$ si ha

$$f^{-1}((0,0,1)) = -\frac{3a}{a^2-4a+3}(x^3-1) - \frac{3}{a^2-4a+3}(x^2-1) + \frac{1}{a-3}(x-1).$$

Per $a \neq 1, 3$ una base di $f^{-1}(\mathcal{L}((0,0,1)))$ è

$$\left(-\frac{3a}{a^2-4a+3}(x^3-1) - \frac{3}{a^2-4a+3}(x^2-1) + \frac{1}{a-3}(x-1)\right)$$

2) i) (2 punti) I generatori del sottospazio vettoriale $\mathcal{U}'$ soddisfano le equazioni di $\mathcal{U}$, viceversa i vettori di una base di $\mathcal{U}$ si scrivono come combinazione lineare dei generatori di $\mathcal{U}'$.

ii) (3 punti) Il complemento ortogonale di $\mathcal{U}$ è

$$\mathcal{U}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, a-d = b = c = 0 \right\}$$

e una sua base è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Nello spazio, rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O; x, y, z)$, sono date le rette

$$r) \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ y+2z+5=0, \end{cases} \qquad s) \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -3t \\ z = t-2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) (3 punti) $A = (3,-3,-1)$ e l'equazione del piano π su cui giacciono le due rette è $x+y+z+1=0$.

b) (2 punti) La sfera Σ ha equazione $(x-5)^2+(y+1)^2+(z-1)^2 = 12$.

c) (2 punti) La circonferenza ha centro in $(5,-1/2,3/2)$ e raggio $r = \sqrt{\frac{23}{2}}$.

4) a) (3 punti) Q è una forma indefinita di segnatura (1,1).

b) (4 punti) Una base rispetto alla quale Q assume forma normale è

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0), \frac{1}{2\sqrt{2}}(0,0,1,1), \frac{1}{2}(1,1,0,0)\right)$$

.

c) (3 punti) I vettori $((0,0,1,-1),(1,-1,0,0,),(0,\sqrt{2},1,0),(-\sqrt{2},0,0,1))$ ad esempio, sono linearmente indipendenti e isotropi.

5) i) (2 punti) Si ha $A(A-I)/2 = I,$ quindi A è invertibile.

ii) (2 punti) La matrice A soddisfa la condizione precedente e quindi $A^{-1} = (A-I)/2$.