Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 15 febbraio 2016

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Compito n. 1**

Esercizio 1. (5 punti) Sia $Y = \mathbb{R}$ e consideriamo la seguente famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di Y

$$A \in \mathcal{T} \iff A = \emptyset \text{ oppure } A = \mathbb{R} \text{ oppure } A = (a, +\infty) \text{ per } a \in \mathbb{R}$$

1. (1 punto) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su Y.
2. (2 punti) Sia $Z \subseteq Y$ un sottoinsieme compatto (nella topologia $\mathcal{T}$). Dimostrare che Z è limitato inferiormente, cioè che esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq z$ per ogni $z \in Z$.
3. (2 punti) Sia $Z \subseteq Y$ un sottoinsieme compatto (nella topologia $\mathcal{T}$) e sia $\alpha = \inf Z$ (estremo inferiore nel senso usuale). Dimostrare che $\alpha \in Z$.

Esercizio 2. (6 punti) Sia $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, dove ∞ è un elemento che non appartiene ad $\mathbb{R}$. Consideriamo la seguente famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X

$$A \in \mathcal{T} \iff A = \emptyset \text{ oppure } \infty \in A$$

1. (1 punto) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia per X.
2. (2 punti) Dimostrare che la topologia indotta sul sottoinsieme $\mathbb{R}$ è la topologia discreta.
3. (2 punti) Dimostrare che $B = \{\infty\}$ è denso in X.
4. (1 punto) Dedurre che lo spazio X è separabile mentre il sottospazio $\mathbb{R}$ non è separabile.

Esercizio 3. (6 punti) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (con la topologia euclidea) un sottoinsieme *aperto* e sia $a \in U$. Definiamo

$$C_a = \{x \in U \mid \text{ esiste un cammino contenuto in } U \text{ che congiunge } a \text{ e } x\}$$

(C_a è la *componente connessa per archi* di a).

1. (2 punti) Dimostrare che C_a è aperto in U (nella topologia di sottospazio) per ogni $a \in U$.

2. (2 punti) Dimostrare che C_a è chiuso in U (nella topologia di sottospazio) per ogni $a \in U$.

3. (2 punto) Dedurre che un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

Esercizio 4. (5 punti) Sia X uno spazio topologico e siano A e B due sottospazi compatti.

1. (3 punti) Dimostrare che $A \cup B$ è compatto.

2. (2 punti) Se X è di Hausdorff, dimostrare che $A \cap B$ è compatto.

Esercizio 5. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = e\, b\, c^{-1}\, d\, a^{-1}\, c\, b^{-1}\, a\, d^{-1}\, e^{-1}$$

Determinare se S è orientabile o no, e determinare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 6. (6 punti) Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcolare $\exp(A)$. (Suggerimento: in quale base A è in forma di Jordan?)