Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 15 giugno 2016

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Compito n. 1**

Esercizio 1. (5 punti) Sia X un insieme e sia $a \in X$ un elemento fissato. Consideriamo la seguente famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X

$$A \in \mathcal{T} \iff A = \emptyset \text{ oppure } a \in A$$

1. (1 punto) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.
2. (2 punti) Dimostrare che X è connesso.
3. (2 punti) Dimostrare che X è di Hausdorff se e solo se $X = \{a\}$.

Esercizio 2. (6 punti) Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso e Y uno spazio di Hausdorff.

1. (3 punti) Sia $f : X \to Y$ è una funzione continua che è costante su A. Dimostrare che f è costante su tutto X.

Consideriamo adesso la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

e poniamo $X = \mathbb{R}/\sim$ con la topologia quoziente.

2. (3 punti) Se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, dimostrare che è costante.

Esercizio 3. (6 punti) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione.

1. (4 punti) Dimostrare che f è continua (nella topologia euclidea) se e solo se il grafico di f è compatto.

2. (2 punti) Trovare un esempio di funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ discontinua il cui grafico sia chiuso (ma non compatto, naturalmente).

Esercizio 4. (5 punti) Siano X e Y spazi topologici contraibili.

1. (3 punti) Dimostrare che lo spazio prodotto $X \times Y$ è contraibile.
2. (2 punti) Supponiamo ora $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ (X e Y sempre contraibili). L'unione $X \cup Y$ è contraibile?

Esercizio 5. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a^{-1}\, b\, d\, e\, b^{-1}\, a\, c\, e^{-1}\, d^{-1}\, c$$

Determinare se S è orientabile o no, e determinare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 6. (6 punti) Sia A la matrice quadrata complessa di cui è dato anche il polinomio caratteristico:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \qquad c_A(t) = (t+3)^3$$

Trovare una matrice invertibile P e una matrice in forma di Jordan J tali che $A = PJP^{-1}$: