BIBLIOTHÈQUE DE PHILOSOPHIE CONTEMPORAINE
FONDÉE PAR FÉLIX ALCAN

LA TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

des origines à Poincaré

PAR

JEAN-CLAUDE PONT
Docteur ès Sciences mathématiques

PRÉFACE DE RENÉ TATON

Ouvrage réalisé et publié avec le concours
du Fonds national suisse de la Recherche scientifique
et de la Fondation pour l'Avancement des Mathématiques en Suisse

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS
1974

AU GUIDE FLORENTIN THEYTAZ, MON CAMARADE

A MES CHERS PARENTS

Dépôt légal. — 1re édition : 2e trimestre 1974

« Toutefois je ne tardai pas à m'apercevoir dans le silence apparent de ces galeries qu'il y avait un mouvement, un murmure qui n'était pas de la mort. Ces papiers, ces parchemins laissés là depuis longtemps ne demandaient pas mieux que de revenir au jour. Ces papiers ne sont pas des papiers, mais des vies d'hommes, de provinces, de peuples. D'abord les familles et les fiefs, blasonnés dans leur poussière, réclamaient contre l'oubli. Les provinces se soulevaient, alléguant qu'à tort la centralisation avait cru les anéantir... Si on eût voulu les écouter tous, comme disait ce fossoyeur au champ de bataille, il n'y en aurait pas eu un de mort. Tous vivaient et parlaient, ils entouraient l'auteur d'une armée à cent langues, que faisait taire rudement la grande voix de la République et de l'Empire.

« Doucement, messieurs les morts, procédons par ordre, s'il vous plaît. »

Jules MICHELET,
Préface de 1833 de *L'Histoire de France*.

PRÉFACE

Malgré sa proximité, le dix-neuvième siècle mathématique n'a pas encore été l'objet de toutes les recherches approfondies que son étude nécessiterait. La variété, la technicité, le nombre et l'étendue des publications réalisées tout au long de ce siècle rebutent en effet beaucoup d'historiens. Quant aux mathématiciens, déconcertés par les notations, le vocabulaire et l'orientation de cette floraison de travaux, ils limitent leurs prospections aux grandes œuvres où semblent s'amorcer certains courants de la mathématique contemporaine. Seules quelques excellentes mais rapides études de synthèse comme les *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, de Felix Klein ou les *Eléments d'histoire des mathématiques*, de Nicolas Bourbaki, ainsi que d'assez nombreuses monographies portant sur l'œuvre de certains mathématiciens ou sur l'évolution de branches particulières de la science apportent des contributions partielles à une histoire dont beaucoup d'éléments restent à réunir et à analyser. Aussi faut-il savoir gré à Jean-Claude Pont d'avoir entrepris le défrichage d'un domaine pratiquement inexploré, celui des origines et des premiers développements de l'*analysis situs*, discipline qui, limitée tout d'abord à une étude des relations qualitatives de l'espace, s'est muée peu à peu, au cours du dix-neuvième siècle, et à la suite de plusieurs changements successifs dans ses buts, dans ses méthodes et dans son langage, en une branche véritable des mathématiques.

Cette discipline nouvelle, en pleine expansion et en perpétuelle mutation, la topologie algébrique, est un des secteurs les plus vivants et les plus féconds de la mathématique contemporaine. Deux grandes dates jalonnent cette histoire, celle de la naissance de l'*analysis situs*, en 1750, avec l'exposé, par Leonhard Euler, de son célèbre théorème sur les polyèdres [1] et celle du passage — au

[1] Ce théorème d'Euler se trouve énoncé, sous forme d'ailleurs incorrecte, dans un mémoire présenté le 26 novembre 1750 devant l'Académie de Berlin et publié en 1758 dans le tome IV des *Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropoli*. Sa première démonstration, malheureusement insuffisante, fut présentée devant l'Académie de Berlin le 9 septembre 1751 et publiée à la suite du mémoire précédent.

*langage près — de l'*analysis situs *à la topologie algébrique, en 1895, avec la publication, dans le volume du centenaire du* Journal de l'Ecole polytechnique, *du premier grand mémoire de Henri Poincaré sur l'*Analysis situs [1].

Afin de pouvoir approfondir son analyse, J.-C. Pont a limité son étude à la période d'un siècle et demi qui sépare ces deux étapes décisives de la genèse de la topologie algébrique. Choix judicieux ; il apparaît en effet que dans cette voie Euler n'eut que des pseudo-précurseurs ; et, par ailleurs, la période contemporaine ouverte par Poincaré a été l'objet d'études récentes de H. Hopf, J. Dieudonné, S. Lefschetz, M. Bollinger, etc. Il est à remarquer de plus qu'en dehors de l'apport d'Euler qui se situe entre 1736 et 1751 et d'une brève contribution de Legendre (dans ses Elémens de géométrie *de 1794), tous les autres matériaux recensés et analysés par J.-C. Pont concernent le dix-neuvième siècle, depuis la première démonstration de nature topologique du théorème fondamental de l'algèbre par Gauss (1799) jusqu'à la publication par Walther von Dyck de ses seconds « Beiträge zur Analysis situs » dans les* Mathematische Annalen *(1890). Par l'importance de ces documents ainsi prospectés, par la clarté et la rigueur de leur interprétation, cette première étude de caractère historique d'un jeune mathématicien suisse apporte une contribution aussi riche qu'originale à notre connaissance de l'évolution des mathématiques au dix-neuvième siècle.*

Le résumé imagé « de cette petite enfance de la topologie » et l'utile chronologie que donne J.-C. Pont en guise de conclusion à son étude nous dispensent d'en situer les grandes lignes. Quelques points caractéristiques nous paraissent cependant mériter d'être mis en lumière.

Le premier concerne le rôle fondamental joué dans les premières étapes de cette histoire par la mise au point progressive de l'énoncé et de la démonstration du « théorème d'Euler ». Si Euler, avec sa perspicacité habituelle, réussit dès l'abord à attirer l'attention sur un problème typique et à introduire le théorème élémentaire le plus célèbre de la théorie des polyèdres, par contre sa conception traditionnelle et restrictive l'empêche de donner à son énoncé la précision nécessaire et à sa démonstration la rigueur indispensable. Plus d'un demi-siècle plus tard, Cauchy, au début de sa carrière,

[1] Les différentes contributions de Poincaré à l'*analysis situs* se trouvent commodément regroupées au tome VI de ses *Œuvres* (R. Garnier et J. Leray, éd., Paris, 1953, p. 183-538). L'essentiel en est constitué par ce grand mémoire de 1895 (dont la première idée remonte à 1892) et par les cinq Compléments successifs que Poincaré lui apporta entre 1899 et 1904.

*commettra, au sujet du théorème d'Euler, des erreurs similaires qui se répercuteront sur son œuvre ultérieure et l'empêcheront de saisir le rôle fondamental de l'*analysis situs *en mathématiques, et de jeter les bases de la théorie moderne des fonctions analytiques. Quant au théorème lui-même, de remarquables travaux de S. Lhuilier (1813), K. von Staudt (1847) et L. Schläfli (1850) permettront de le placer sous des hypothèses convenables et de l'étendre aux espaces à* n *dimensions, tout en précisant le concept de polyèdre et en explicitant les premières idées topologiques.*

*Mais l'histoire évoquée ne se limite pas à celle du théorème d'Euler et l'œuvre de J. B. Listing ouvre la voie à la naissance d'une science nouvelle que symbolise le terme de topologie introduit par lui en 1836. Dans la première moitié du dix-neuvième siècle c'est probablement Gauss qui eut la vision la plus profonde du rôle de cette science, mais ses écrits sur ce sujet sont peu nombreux et c'est de façon indirecte, par son influence sur Listing, Möbius et d'autres jeunes savants, que son apport apparaît essentiel. Mais en 1851, la « Dissertation inaugurale » de Bernhard Riemann marque un véritable tournant dans le développement de l'*analysis situs. *Sans lui consacrer d'étude systématique, Riemann a rassemblé d'importants résultats nouveaux concernant la topologie : transformations topologiques, ordre de connexion, classification des surfaces suivant les principes de l'*analysis situs, *propriétés des variétés à* n *dimensions, etc. — et fait de cette discipline un précieux auxiliaire pour l'étude de la théorie des fonctions analytiques. D'une importance capitale bien qu'inachevée, cette œuvre fut transmise, précisée et développée par des disciples tels que Durège, Neumann et Betti. D'une inspiration beaucoup plus géométrique, l'effort contemporain de A. F. Möbius, remarquablement analysé par J.-C. Pont, est également essentiel, bien que ses répercussions aient été plus limitées. Viennent ensuite les travaux, contemporains et complémentaires, de C. Jordan, premier auteur français à réaliser une œuvre marquante dans ce domaine, de l'Allemand Felix Klein et du Suisse L. Schläfli, puis les premières conséquences de la théorie des ensembles de G. Cantor, et enfin les études de W. von Dyck qui vont ouvrir la voie à Henri Poincaré. Dès ses premiers grands travaux, ce dernier ressent l'impérieux besoin de disposer d'une méthode qui « ferait connaître les relations qualitatives de l'espace à plus de trois dimensions », d'une extension de l'*analysis situs *à ces espaces* [1] *et, pour fonder cette discipline*

[1] « Quant à moi, toutes les voies diverses où je m'étais engagé successivement me conduisirent à l'*Analysis situs*. J'avais besoin des données

*nouvelle, il écrira bientôt sa série de mémoires sur l'*analysis situs, *point de départ de la topologie algébrique moderne.*

C'est à situer les grandes étapes, les lignes directrices et les détours de cette histoire passionnante que Jean-Claude Pont a consacré cet ouvrage qui étend considérablement et renouvelle en partie nos connaissances sur ce sujet. On ne peut que féliciter ce jeune mathématicien, élève du grand spécialiste de la topologie algébrique que fut le regretté Heinz Hopf, de s'être consacré avec méthode et passion à cette étude, et d'apporter ainsi une contribution de valeur à l'histoire de cette mathématique du dix-neuvième siècle, si proche de nous dans le temps et déjà si lointaine par son langage, ses conceptions et son sens incertain de la rigueur. Je souhaite que ce jeune chercheur ait la possibilité de poursuivre son effort si fructueux en étudiant l'histoire d'une autre grande conquête de la mathématique de cette époque, la création des géométries non-euclidiennes.

René TATON.

de cette science pour poursuivre mes études sur les courbes définies par des équations différentielles et pour les étendre aux équations différentielles d'ordre supérieur et, en particulier, à celles du problème des trois corps. J'en avais besoin pour l'étude des fonctions non uniformes de deux variables. J'en avais besoin pour l'étude des périodes des intégrales multiples et pour l'application de cette étude au développement de la fonction perturbatrice. Enfin, j'entrevoyais dans l'*Analysis situs* un moyen d'aborder un problème important de la théorie des groupes, la recherche des groupes discrets ou des groupes finis contenus dans un groupe continu donné » (*Analyse des travaux scientifiques* de Henri POINCARÉ, rédigée en 1901, publiée en 1921 dans les *Acta Mathematica* et citée d'après le t. VI des *Œuvres*, p. 183).

Avant-propos

Dans les pages qui suivent, l'auteur se propose de décrire la naissance et la petite enfance de la topologie algébrique, cette province des mathématiques à qui la science du nombre et de l'espace doit tant. On trouvera dans l'avant-propos des considérations élémentaires sur la topologie, accompagnées de quelques précisions sur la nature, les limites et la réalisation de cette histoire.

Intuitivement, une transformation topologique d'une figure est une transformation qui se fait sans déchirure ni recouvrement. Ainsi, gonfler une chambre à air c'est la déformer topologiquement, au moins dans la période qui précède l'éclatement. De même lorsqu'on tire sur un fil élastique, quelle que soit d'ailleurs sa forme finale. Deux figures, images l'une de l'autre par une telle transformation, sont homéomorphes ou topologiquement équivalentes. Aussi a-t-on pu dire, non sans humour, qu'un topologiste est un mathématicien qui ne sait pas distinguer une bouée de sauvetage d'une tasse de café.

En libérant notre définition de son aspect intuitif, on obtient ceci : une transformation topologique, ou homéomorphie, est une bijection continue dans les deux sens. Quant à la topologie, elle est cette partie des mathématiques qui traite des propriétés des figures se conservant par des transformations topologiques. Ainsi, le fait d'être close pour une ligne est une propriété topologique, ce qui n'est pas le cas de sa longueur. Un problème fondamental de la topologie consiste alors à déterminer si deux figures sont homéomorphes ou non, c'est-à-dire à répertorier et à dénombrer les classes induites par l'homéomorphisme.

Pour les besoins de notre histoire, on doit préciser quelque peu ce mot « figure » qui apparaît dans la définition. Bien qu'on ne le trouve nulle part écrit, les figures étudiées par les mathématiciens de la période qui nous occupe sont toujours supposées triangulables, c'est-à-dire qu'on peut les recouvrir par un nombre fini ou infini dénombrable de segments, de triangles, de tétraèdres, etc. Ces figures se prêtent donc par nature à une décomposition polyédrale, qui à son tour est représentable par un schéma, dont l'étude combinatoire permet d'analyser, au point de vue topologique, la figure qui le définit.

Cette attitude est assez restrictive pour éliminer les ensembles dont l'étude topologique entraîne des difficultés ensemblistes, tout en étant suffisamment large pour englober presque toutes les figures intéressantes. Le propre de la topologie combinatoire est donc de substituer des schémas aux ensembles de points considérés. Or l'étude de ces schémas relève de l'algèbre linéaire et de la théorie des groupes. L'algèbre prend ainsi possession de la topologie combinatoire. Cela explique pourquoi l'expression topologie combinatoire fut remplacée, vers 1940, par la dénomination topologie algébrique, mieux adaptée aux méthodes de cette science. Il serait donc vain de chercher une solution de continuité entre la topologie combinatoire des origines et la topologie algébrique.

D'après notre définition, la notion de fonction continue est centrale en topologie ; les propriétés que l'on établit dans cette discipline sont donc intimement liées à celles des fonctions continues. Or, à nul endroit la fonction continue n'est davantage chez elle qu'en analyse. De là à concevoir une étroite corrélation entre ces deux disciplines, il n'y a qu'un petit pas, allègrement franchi par les mathématiciens du XX^e siècle. Prenant pour réflexion la fonction continue, qu'elle rapporte aux concepts de voisinages ouverts et fermés, la topologie générale prend rapidement ses distances à l'égard du modèle que lui fournit l'espace euclidien, pour s'élever à un haut degré de généralité en raisonnant sur des ensembles quelconques, dont des parties convenablement choisies sont considérées *a priori* comme des ensembles ouverts. La fonction continue se définit *ipso facto* et avec elle apparaît le problème de la caractérisation topologique de ces ensembles. Ce point de vue s'est développé à partir des notions d'espace métrique (M. Fréchet, 1906) et d'espace topologique (F. Hausdorff, 1914).

Au commencement de nos recherches, la matière qui constitue l'histoire de la topologie algébrique des origines aux travaux de Poincaré nous semblait assez restreinte pour se prêter à une étude quasiment exhaustive. Très vite toutefois, il est apparu que les documents étaient plus riches que prévu. Aussi avonsnous été contraints de sacrifier quelques sujets pourtant en rapport avec le développement de la topologie. C'est ainsi que nous

avons ignoré les problèmes qui concernent les nœuds, les graphes et le coloriage des cartes, à l'exception de la question des ponts de Kœnigsberg et du travail de Kirchhoff sur les circuits électriques. Nous avions auparavant acquis la conviction que ces matières n'eurent guère d'influence sur l'évolution de la topologie. L'origine de la topologie et les travaux de Poincaré sont les limites naturelles de cette histoire. Avec les recherches du grand savant français — qui écrivit à lui seul à peu près autant de pages sur la topologie que tous les auteurs rencontrés dans notre histoire — la topologie gagne en effet ses lettres de noblesse et devient une discipline autonome des mathématiques.

Le présent ouvrage fut rendu possible grâce à l'appui et au dévouement de nombreuses personnes. D'abord MM. Heinz Hopf de Zürich et René Taton de Paris. Leur gentillesse, les encouragements constants qu'ils nous ont prodigués furent le ciment de ce travail : sans eux il n'aurait vraisemblablement jamais vu le jour. Ensuite, M. B. Eckmann, qui accepta de prendre la direction de notre thèse, puis MM. A. Pfluger et G. de Rham ; finalement, MM. P. O. Genoud et M. A. Pichard pour le soin qu'ils ont apporté respectivement à l'exécution des figures et à la correction des épreuves, et Mme Christine Pont pour le réconfort que sa présence nous apporta aux heures difficiles. Que toutes ces personnes trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude. Nos remerciements vont encore à la Société helvétique de sciences, à la Fondation pour l'avancement des mathématiques en Suisse, ainsi qu'aux éditions P.U.F. et au personnel de la Bibliothèque cantonale du Valais.

Note : Pour la période qui fait suite à celle envisagée dans cet ouvrage, on peut consulter :

— Maja BOLLINGER, Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffs, *Archive for history of Exact Sciences*, vol. 9, number 2, 1972, p. 94-166.
— Heinz HOPF, Ein Abschnitt aus der Entwicklung der Topologie, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 68, 1966, p. 182-192.
— Solomon LEFSCHETZ, The early development of algebraic topology, *Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica*, vol. 1, nº 1, 1970, p. 1-48.

PREMIÈRE PARTIE

LES ORIGINES

Chapitre Premier

LES PSEUDO-PRÉCURSEURS

Comme bien des histoires, celle de la topologie commence par des légendes, auxquelles est consacré ce chapitre. Dans la première partie, nous verrons que Leibniz n'est pas le créateur de l'*analysis situs* (1), tandis que dans la seconde, nous examinerons ce qu'il faut penser d'une opinion assez répandue attribuant à Descartes la paternité d'une proposition connue généralement sous la dénomination de théorème d'Euler, et qui est d'une grande importance pour notre science.

§ 1. LEIBNIZ ET L' « ANALYSIS SITUS »

Bien des auteurs ont fait remonter à Leibniz l'origine de la discipline qui nous occupe (2) ; ils s'appuyaient sur une lettre de Leibniz à Huygens du 8 septembre 1679, dont voici l'essentiel :

« Mais après tous les progrès que j'ai faits en ces matières, je ne suis pas encore content de l'algèbre, en ce qu'elle ne donne ni les plus courtes voies, ni les plus belles constructions de géométrie ; c'est pourquoi, lorsqu'il s'agit de cela, je crois qu'il nous faut encore une autre analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement *situm*, comme l'algèbre exprime *magnitudinem*. Et je crois d'en voir le moyen, et qu'on pourrait représenter des figures et même des machines et mouvements en caractères, comme l'algèbre représente les nombres ou grandeurs : et je vous envoie un essai qui me paraît considérable » [*46*, n° 2192].

(1) Le mot topologie, créé en 1836 par Listing (voir p. 41), n'a guère été utilisé avant 1920. Précédemment, on lui préférait l'expression *analysis situs*. Nous considérerons ces deux dénominations comme synonymes.

(2) Voir [*30 a*] ; [*61 a*], p. 815 ; [*63*], p. IX ; [*29*] ; [*55 b*] ; [*58*], p. 236. Les numéros en italique correspondent aux ouvrages et études cités dans la bibliographie, en fin d'ouvrage.

Les termes un peu vagues qu'il utilise pour définir sa nouvelle algèbre, qu'il appelle ailleurs *analysis situs* [*57*, p. 172-178], peuvent bien sûr s'appliquer à la topologie, du moins en partie.

Cependant, nous savons maintenant de façon certaine que le but de Leibniz était tout autre. Dans un travail publié en 1846, Grassmann montre qu'en développant les idées de Leibniz on débouche sur le calcul vectoriel et non sur la topologie [*38 a* ou *38 b*, p. 324].

Voici l'origine de ce travail de Grassmann. Au printemps 1844, la « Fürstliche Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig » met au concours pour l'année 1845 le problème suivant :

« On possède encore quelques restes d'une caractéristique géométrique découverte par Leibniz, dans laquelle la situation réciproque des lieux est déterminée par de simples symboles ainsi que par leurs relations, sans prendre en considération les notions de valeur d'un angle ou de grandeur d'un segment ; elle doit être par là même complètement différente de notre géométrie analytique, aussi bien que de notre géométrie algébrique. On demande de reconstituer et d'étendre ce calcul, ce qui ne paraît pas du tout impossible. »

Grassmann fut le seul participant. Par la suite, c'est Listing (voir p. 43) qui, le premier, a exprimé un doute sur la paternité de Leibniz en matière de topologie ; plus tard, chez M. Dehn et P. Heegaard, le doute se transforme en certitude [*20*, p. 154]. On doit encore citer H. Lebesgue qui, dans une lettre à J. Itard datée du 14 février 1939, montre clairement que le propos de Leibniz n'avait aucun rapport avec notre science [*55 a*, p. 111]. Pour terminer, disons que deux articles à caractère historique ont été consacrés au sujet de ce paragraphe [*32* et *74*].

Ainsi, par un curieux hasard, Leibniz a forgé le nom d'une science, dont il n'a probablement jamais eu connaissance. C'est toutefois ce texte qui mettra Euler, soixante ans plus tard, sur la piste de l'*analysis situs*.

§ 2. DESCARTES ET LE THÉORÈME D'EULER

Au milieu du XIXe siècle, le comte Foucher de Careil découvre parmi les papiers de Leibniz déposés à la Bibliothèque royale de Hanovre, la copie que celui-ci avait faite, lors d'un séjour à Paris (1672-1676), d'un travail de Descartes intitulé *De Solidorum Elementis* et dont l'original a été perdu ; il le publie en 1859 [*23*, p. 214 sq.], avec d'autres inédits.

En 1860, ce texte, qu'une mauvaise lecture avait rendu inintelligible [1], est traduit correctement par E. Prouhet [*75*, p. 484]. Son principal intérêt réside dans le fait qu'il contient une proposition dont le théorème d'Euler sur les polyèdres (voir p. 16 sq.) est une conséquence presque immédiate. Deux interprétations radicalement opposées sont alors possibles, l'une attribuant à Descartes le théorème d'Euler, l'autre affirmant qu'il ne l'a pas vu. Le présent paragraphe a pour objet l'étude de ces deux appréciations.

Le théorème fondamental de Descartes s'énonce : « Dans tout polyèdre, la somme des angles solides est égale à huit angles solides droits. »

A propos de ce théorème, J. Bertrand fait remarquer que :

« La somme des angles extérieurs d'un polyèdre, considérée par Descartes, devient, lorsque le polyèdre est remplacé par une surface, un élément qui joue un grand rôle dans les travaux récents des géomètres, et auquel Gauss a donné le nom de courbure totale. Le théorème de Descartes appliqué à une surface convexe s'énoncerait : la courbure totale d'une surface convexe est égale à 4π » [*5*].

Si on appelle ω la somme de tous les angles plans, e le nombre des sommets, k le nombre des arêtes et f le nombre des faces, cette proposition s'écrit :

$$2\pi e - \omega = 4\pi$$

ou, en prenant l'angle droit comme unité :

$$\omega = 4(e - 2) \tag{1}$$

Le théorème d'Euler s'obtient alors sans difficulté si on rapproche de la relation (1) les deux relations qui se trouvent plus bas dans le texte, savoir :

$$w = \frac{4f + \omega}{2} \tag{2}$$

et

$$w = 2k \tag{3}$$

où w est le nombre de tous les angles plans.

En effet, les expressions (1), (2), (3) entraînent :

$$2k = \frac{4f + \omega}{2} = \frac{4f + 4(e-2)}{2}$$

c'est-à-dire :

$$4k = 4f + 4(e - 2) \quad \text{ou} \quad e - k + f = 2.$$

(1) Plusieurs signes en caractères cossiques, en usage à la fin du XVIe siècle, avaient été pris pour de simples chiffres et imprimés comme tels par le comte Foucher de Careil.

Examinons maintenant les différentes « preuves » que l'amiral E. de Jonquières a données de la priorité de Descartes ; on peut les répartir en deux groupes :

1 *a)* Il remarque que les trois relations que nous avons citées ci-dessus figurent expressément dans le texte de Descartes et que la première, rapprochée des deux dernières, « donne immédiatement *sans calculs ni transformations* :

$$S + F = A + 2\ (^1)\ ;$$

c'est la relation d'Euler. Descartes, qui selon son habitude descend rarement dans les détails, ne fait pas ressortir explicitement cette relation, du moins dans ce qui nous a été conservé du Mémoire » [*47*].

1 *b)* Dans une intervention suivante, du 17 février 1890, il revient sur cette question [*47*, p. 315] :

> « A l'appui de la priorité effective de Descartes dans la découverte de la relation $S + F = A + 2$, j'apporte une nouvelle preuve, tirée de son écrit posthume et plus décisive encore que la première que j'en ai donnée ; car elle démontre que Descartes, non seulement a connu et employé cette formule, comme je l'ai dit, mais de plus qu'il *l'a énoncée explicitement* ; ce que je n'avais pas d'abord remarqué... Descartes ajoute (l. 14, p. 18) (²) : le nombre B des angles plans effectifs est égal à $2(F + S - 2)$, nombre qui ne saurait excéder $6s - 12$.
>
> « Descartes ayant prouvé (p. 217) que $B = 2A$, la proposition précédente se traduit immédiatement par la formule $2A = 2(F + S - 2)$: c'est la relation d'Euler, explicitement exprimée. »

Il est bien clair que ces considérations ne prouvent pas que Descartes ait eu connaissance de la relation d'Euler ; elles montrent tout au plus qu'il était en possession des éléments nécessaires à la mise sur pied de ce théorème. Nous ne souscrirons pas non plus à l'autre raison invoquée par de Jonquières suggérant que Descartes n'a peut-être pas énoncé cette proposition « parce qu'il ne descend que rarement dans les détails » ; il est en effet difficile de considérer l'énoncé de Descartes comme primordial et de faire jouer à celui d'Euler le rôle d'un détail. En outre, on peut appliquer la même argumentation à l'appui de la thèse contraire : c'est peut-être précisément parce qu'il descend rarement dans les détails que Descartes n'a pas cherché à rapprocher les différentes expressions citées plus haut, afin d'établir une relation entre e, k et f.

(¹) C'est la notation d'Euler : S = nombre des angles au sommet, A = nombre des arêtes et F = nombre des faces.

(²) E. de Jonquières se réfère ici à l'ouvrage de Foucher de Careil [*23*].

Dans cette même note, de Jonquières avance deux nouvelles « preuves » :

2 *a)* Voici le texte de Descartes qu'il cite :

> « Connaissant le nombre des angles plans (B) et celui des faces (F) d'un polyèdre, si l'on avait égard à ces seules données, on en déduirait aisément les modes possibles de répartition de ces angles entre les faces : par exemple, si les données sont 5 faces et 18 angles plans, on pourrait avoir deux faces triangulaires et trois quadrangulaires, ou bien... [suivent deux autres combinaisons]. *Mais comme ce même solide possède nécessairement 6 sommets*, la première combinaison est seulement compatible avec l'existence du polyèdre »,

et de Jonquières de conclure :

> « Il est clair, d'après le membre de phrase souligné par moi dans la traduction (aussi bien dans la forme que dans le fond), que Descartes introduit le nombre 6 comme étant la conséquence nécessaire d'un principe connu, et non comme étant le résultat fortuit des données numériques qui se présentent ; et ce principe ne peut être que la relation $F + S = A + 2$, qui donne effectivement ici $S = 6$, puisque $F = 5$ et $2A = 18$ » [*47 b*, p. 316].

La dernière partie de la phrase de Jonquières est entachée d'erreur, car ce résultat peut être obtenu par des relations qui figurent dans le texte de Descartes, sans qu'il soit nécessaire de faire appel à l'énoncé d'Euler ; en effet, on a $f = 5$, $w = 18$ ce qui donne, en utilisant les expressions (1) et (2) :

$$18 = \frac{20 + \omega}{2} \quad \text{d'où} \quad \omega = 16 \quad \text{et} \quad \frac{16 + 8}{4} = 6.$$

2 *b)* Dans la même note, de Jonquières écrit :

> « Enfin, à la page 215, où il s'agit de montrer qu'il ne peut exister que 5 polyèdres réguliers convexes, Descartes donne comme condition à remplir par les nombres F et S que les deux divisions $\frac{2S - 4}{F}$ et $\frac{2F - 4}{S}$ (¹) puissent se faire exactement. Or, il est aisé de voir que ces deux conditions symétriques découlent de la double égalité qui se présente dans les polyèdres réguliers, $2A = nF = mS$ (²) (n et m entiers), si l'on y fait usage, pour éliminer A de la relation $F + S = A + 2$. »

Ceci est correct, mais on arrive au même résultat sans utiliser la relation d'Euler ; il suffit d'appliquer certaines relations

(¹) $\frac{2e - 4}{f}$ et $\frac{2f - 4}{e}$ dans notre notation.

(²) $2k = nf = me$ dans notre notation.

qui se trouvent dans le texte de Descartes : comme $\frac{\omega}{2} = 2e - 4$ et comme la somme des angles doit être un multiple entier du nombre de faces (polyèdre régulier), on peut écrire :

$$\omega = (2e - 4)2 = mf \Rightarrow \frac{2(2e-4)}{f} = m \Rightarrow \frac{2e-4}{f} = m',$$

m et m' étant des entiers.

On obtient tout aussi facilement la relation $\frac{2e-4}{f} = n$, avec n entier.

En effet :

$$4f = 2w - \omega \Rightarrow 4f + 4e = 8 + 2w = 2ne$$

$$\Rightarrow \frac{4f + 4e - 8}{e} = 2n \Rightarrow \frac{2f + 2e - 4}{e} = n'$$

$$\Rightarrow \frac{2f-4}{2} + 2 = n' \Rightarrow \frac{2f-4}{e} = n'' \qquad (n'' \text{ entier})$$

A bien considérer les choses, on constate que tant le premier groupe de « preuves » que le second s'appuient implicitement sur l'idée suivante : il suffit de rapprocher trois relations du texte de Descartes pour parvenir à l'énoncé d'Euler, ce qui n'aurait su échapper à l'auteur du *Discours de la méthode*. A cet argument d'ordre psychologique on peut répondre par un exemple vécu, que Jacques Hadamard retrace dans l'un de ses ouvrages [*39 a*, p. 54] :

« Mon travail suivant fut ma thèse. Deux théorèmes importants pour le sujet étaient des conséquences si évidentes et immédiates des idées qui y étaient contenues que, des années plus tard, d'autres auteurs me les attribuèrent et je fus obligé d'avouer que, si évidents fussent-ils, je ne les avais pas vus. »

Puis à la page 56 :

« Il est probable que beaucoup de chercheurs, sinon tous, peuvent se rappeler des épreuves similaires. Il est réconfortant de penser que la même chose peut arriver aux plus grands. Dans son *Art de persuader*, Pascal a posé un principe qui est fondamental pour la méthode, non seulement en mathématiques, mais aussi pour tout sujet déductif ou toute question de raisonnement, à savoir : il faut substituer la définition au défini.

« D'autre part, plus loin il remarque le fait évident que, de même qu'il n'est pas possible de tout démontrer, il est également impossible de tout définir, et cela pour la même raison. Il existe des idées primitives qu'il est impossible de définir. S'il avait seulement pensé à juxtaposer

ces deux déclarations, il se serait trouvé devant une contradiction fondamentale et par conséquent devant le grand problème de Logique qui mène à la nécessité des définitions axiomatiques (ce qui donne sa vraie signification au célèbre postulat d'Euclide)... Mais il n'a pas rapproché ces deux idées. »

Notons encore que Leibniz non plus n'a pas soupçonné le théorème d'Euler, quand bien même il avait étudié minutieusement les manuscrits de Descartes.

Notre conclusion sera donc celle de Lebesgue :

« Je ne suis pas du tout d'accord avec ceux qui prétendent attribuer à Descartes le théorème d'Euler. Descartes n'a pas énoncé le théorème, il ne l'a pas vu » [*55 b*, p. 315].

Voici encore deux textes de Lebesgue :

a) « Que Descartes soit passé si près du théorème sans le voir, me paraît au contraire souligner le mérite d'Euler. Encore peut-on dire que Descartes était jeune quand il s'occupait de ces questions, mais Leibniz, qui a trouvé le cahier de Descartes assez intéressant pour le recopier, qui a reconnu que la géométrie de Descartes ne s'appliquait pas aux questions où interviennent des relations d'ordre et de position, qui a rêvé de construire l'algèbre de ces relations et l'a dénommée à l'avance *Analysis situs*, n'a pas aperçu, dans le cahier de Descartes, le théorème d'Euler si fondamental en *Analysis situs* » [*55 b*, p. 320].

b) « Les premières notions importantes de géométrie de situation ont été acquises au cours de l'étude des polyèdres... En 1890, de Jonquières, dans une série de notes de C. R., a créé la légende que ce théorème était dû à Descartes... Descartes n'a pas énoncé le théorème d'Euler ; quant à la géométrie de situation, il ne l'a nullement soupçonnée ; sans quoi, il eût eu plus de scrupules à affirmer plus tard que sa méthode algébrique réglait toutes les questions de géométrie » (1).

Enfin, nous profitons de cette occasion pour rectifier une erreur qu'on rencontre dans deux ouvrages français [*31*, p. 25 et *21*, p. 99] ; on y trouve la phrase suivante :

« Ce théorème souvent attribué à Euler est dû en réalité à Descartes comme le montrent D. Hilbert et S. Cohn-Vossen [*42*, p. 254] »,

alors que ces deux auteurs attribuent à Euler le théorème en question.

(1) Texte tiré des cahiers de Lebesgue (voir n. 2, p. 19).

CHAPITRE II

LES PRÉCURSEURS

L'histoire de la topologie commence peut-être en 1736, quand Euler reconnaît un aspect particulier dans un problème que rien, de prime abord, ne distingue de ses homologues de la géométrie élémentaire. En 1750-1751, le mathématicien bâlois rédige deux articles, l'un affecté au théorème d'Euler sur les polyèdres, l'autre à sa démonstration. Leur importance pour notre sujet apparaît clairement si l'on songe que l'histoire de l'*analysis situs* jusqu'en 1851 se confond, à de rares exceptions près, avec l'histoire du théorème. Nous consacrerons à ces questions les deux premiers paragraphes de ce chapitre ; nous verrons ensuite, au paragraphe 3, ce que notre science doit à Gauss.

§ 1. LE PROBLÈME DES PONTS DE KŒNIGSBERG

Le problème des ponts de Kœnigsberg, sur lequel Euler a publié une étude en 1736 (1), concerne un domaine de la topologie qui sort du cadre de notre travail comme nous l'avons indiqué dans l'avant-propos ; cependant, c'est probablement à cette occasion que pour la première fois un mathématicien est amené à s'occuper consciemment d'*analysis situs* ; aussi nous a-t-il semblé naturel de réserver quelques lignes à ce travail. Voici les principaux passages du texte d'Euler [*30 a'*] :

« Outre cette partie de la géométrie qui traite des grandeurs et qui a été de tout temps cultivée avec beaucoup de zèle, il en est une autre, jusqu'à nos jours complètement inconnue, dont Leibniz a fait le premier mention et qu'il appela géométrie de position. D'après lui, cette partie de la géométrie s'occupe de déterminer seulement la position et de

(1) Ce travail a été présenté le 26 août 1735 à l'Académie de Saint-Pétersbourg.

chercher les propriétés qui résultent de cette position ; dans ce travail, il n'est besoin ni d'avoir égard aux grandeurs elles-mêmes, ni de les calculer ; mais il n'est pas encore assez bien établi quels sont les problèmes de ce genre appartenant à la géométrie de position, et quelle méthode il faut employer pour les résoudre ; c'est pourquoi lorsque récemment il fut question d'un problème qui semblait, à la vérité, se rattacher à la géométrie ordinaire, mais dont cependant la solution ne dépendant, ni de la détermination de grandeurs, ni du calcul de quantités, je n'ai point balancé à le rapporter à la géométrie de position, d'autant plus que les considérations de position entrent seules dans la solution, tandis que le calcul n'y est pour rien. J'ai donc cru utile d'exposer ici, comme un exemple de géométrie de position, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre les problèmes de ce genre.

« Or ce problème qu'on me disait être assez connu était le suivant : à Kœnigsberg, en Prusse, il y a une île A appelée le Kneiphof, entourée d'un fleuve qui se partage en deux bras, comme on peut le voir sur la figure 1, mais les bras de ce fleuve sont garnis de sept ponts *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, et l'on proposait cette question sur ces ponts : une personne peut-elle s'arranger de manière à passer une fois sur chaque pont, mais

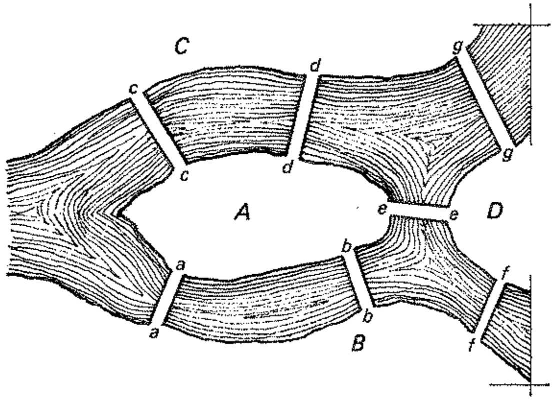


FIG. 1

une fois seulement ? Les uns affirmaient que cela était possible ; d'autres niaient ; d'autres en doutaient ; mais personne ne pouvait prouver. Quant à moi, j'ai fait de ce problème le suivant beaucoup plus général : quelles que soient la figure du fleuve et sa distribution en bras, et quel que soit aussi le nombre des ponts, trouver si une personne peut traverser le fleuve en passant une seule fois sur chaque pont. »

Puis Euler montre, entre autres, que ce problème n'a pas de solutions dans le cas des ponts de Kœnigsberg.

§ 2. L'HISTOIRE DU THÉORÈME D'EULER DANS LA PERSPECTIVE TOPOLOGIQUE

2.1. *Généralités*

Dans cette histoire, le concept de polyèdre (polygone) est fondamental ; aussi est-il peut-être utile d'en dire quelques mots. Dès l'aube de la pensée géométrique et jusqu'au début du XIX^e siècle, on considère le polyèdre comme un corps solide, convexe ou non selon les besoins, compris entre des faces planes (1). Tant que l'instrument d'observation a un pouvoir de séparation faible, cette définition paraît suffisante. Aussitôt que, en revanche, celui-ci s'affine, comme c'est le cas lors du passage de la géométrie classique à la topologie, notre définition devient grossière et inadéquate. Faute de l'avoir remarqué, Euler, Cauchy et bien d'autres vont se fourvoyer dans l'énoncé et la démonstration du théorème qui fait l'objet de ce chapitre. Cette leçon est longue à se faire entendre ; c'est ainsi que, cinquante ans après la mésaventure de Cauchy et les mises en garde de Lhuilier, on trouve encore des auteurs qui s'abstiennent de toute définition et de toute précision à caractère topologique ; à tel point qu'en 1869 J. K. Becker consacre un article à dénoncer les erreurs engendrées par cette mauvaise habitude [*4*].

Quatre grandes dates dans l'histoire du théorème d'Euler :

a) 1750, année de sa découverte ;
b) 1813, où l'on s'aperçoit qu'il ne s'applique pas indifféremment à tous les polyèdres ;
c) 1847, qui voit von Staudt le placer enfin sous des hypothèses convenables ;
d) 1850 finalement, où Schläfli en obtient la première généralisation pour les espaces à n dimensions.

A part ces travaux, il existe une foule de mémoires qui traitent du théorème d'Euler. La suite de ce paragraphe est réservée à l'essentiel de cette histoire.

2.2. *Les deux mémoires d'Euler*

Dans un travail datant de 1750 [*30 b*], Euler se propose d'établir une classification des polyèdres. Il remarque d'abord que l'on peut ranger les solides, comme on l'avait fait jusqu'alors,

(1) Ainsi, par exemple, Klügel parle de « corps convexe compris entre des faces planes » [*51*, p. 816].

d'après le nombre des faces (tétraèdre, hexaèdre...). Cependant, cette classification se révèle assez tôt insuffisante :

« S'il suffit, pour désigner une catégorie de figures planes rectilignes, de rappeler le nombre des côtés qui la limitent (étant donné qu'il y a le même nombre d'angles que de côtés), dans les solides, en revanche, le nombre des angles solides peut à ce point différer du nombre de faces, qu'il faut les indiquer tous deux » [*30 b*, n° 12].

Il obtient alors une classification du type « pentaèdre hexagone, tétraèdre hexagone... » qui n'est malheureusement — ou plutôt heureusement, si l'on envisage le développement de la topologie — pas satisfaisante. Il n'est en effet que de considérer les deux figures suivantes, tirées d'un ouvrage de Steinitz [*87 a*, p. 3], pour le voir :

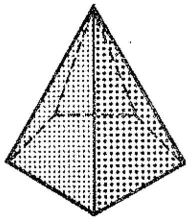


FIG. 2

$e = 6 \quad f = 6$

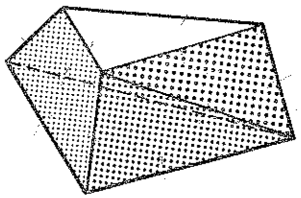


FIG. 3

Il était dès lors naturel de faire appel au troisième nombre caractéristique : le nombre d'arêtes ; toutefois, comme le montre encore l'exemple qui précède, k est le même pour les deux polyèdres. Ceci amène Euler à penser qu'il peut exister une dépendance entre ces trois nombres ; c'est sans doute de cette constatation que devait sortir la célèbre relation $e - k + f = 2$ dont il est ici question.

Ce travail a été présenté à l'Académie des Sciences de Berlin le 26 novembre 1750 [*28*]. Mais c'est dans une lettre à Goldbach, datée du 14 novembre 1750 [*30 c*, p. 332], qu'Euler mentionne pour la première fois ce théorème ; il y précise que c'est « l'autre jour » qu'il en eut l'intuition. Quant au second mémoire [*30 d*], il a été lu à la séance du 9 septembre 1751 [*30 c*]. En ce qui concerne la démonstration, Euler écrit :

« Il me faut bien avouer que je n'ai pas encore pu trouver de ce théorème une démonstration valable ; toujours est-il que sa valeur peut facilement être reconnue pour tous les genres de solides que l'on veut bien examiner » [*30 b*, n° 33].

Finalement, il réussit à en donner une démonstration dans le second mémoire [*30 d*]. Celle-ci, bien qu'erronée, est intéressante à divers titres ; aussi en dirons-nous quelques mots. Auparavant signalons, c'est fondamental pour notre histoire, que l'énoncé d'Euler est incorrect, ce théorème s'adressant à une catégorie beaucoup moins étendue de solides. Euler commence par indiquer comment, à l'aide de différentes coupures, il obtient un polyèdre ayant un sommet de moins que le polyèdre donné. Il poursuit la destruction du polyèdre jusqu'à ce qu'il aboutisse à une pyramide. Il montre enfin qu'au cours de ces différentes coupures l'expression $c = e - k + f$ demeure la même ; comme d'autre part c (pyramide) $= 2$, le théorème est démontré.

Voici les critiques que l'on peut adresser à ce raisonnement :

1) Euler est obligé de supposer la convexité du solide considéré, car sans cela il n'est plus certain de pouvoir en détacher une partie ; en outre, après la première opération consistant à enlever un sommet au solide de départ, il arrive que le corps qui en résulte ne soit plus convexe, ce qui empêche de continuer la désagrégation du polyèdre.

Ce n'est pas nécessairement une erreur ; car le lemme suivant, s'il est correct, remet les choses en ordre : étant donné un sommet quelconque d'un polyèdre convexe, il existe toujours au moins une coupure telle que l'ensemble résultant soit encore convexe.

2) Comme Lebesgue l'a démontré [*55 b*, p. 329], on n'aboutit pas forcément à un polyèdre.

3) Après un certain nombre d'opérations, on n'a pas toujours affaire à un polyèdre, mais à plusieurs polyèdres réunis par une seule arête ou par un seul sommet. Dans ce cas, la destruction de l'une des parties ne laisse pas invariant le nombre c.

Lebesgue est parvenu, en ne modifiant que peu le raisonnement d'Euler, à démontrer rigoureusement le théorème d'Euler, ce qui lui a fait dire :

« La démonstration qui nous y conduit (1) diffère à peine de certaines de celles que l'on emploie maintenant ; aussi fait-elle bien voir, il me semble, combien nos procédés sont proches des considérations qui se sont présentées à Euler quand, le premier, il s'occupa de ces questions » [*55 b*, p. 335].

Euler ne paraît pas avoir reconnu que sa proposition relevait de l'*analysis situs*, qu'il avait entrevue dans son mémoire de 1736.

(1) **Il s'agit de la relation $F + S - A = 3 - B$, où B est le nombre de Betti.**

Aussi ne rejoindrons-nous pas Lebesgue lorsqu'il écrit [*55 b*, p. 319-320] :

« Euler l'a (1) aperçu et en a bien compris le caractère. Pour Euler, la description de la forme d'un polyèdre doit précéder l'utilisation des mesures de ses éléments et c'est pourquoi il a posé son théorème comme théorème fondamental. C'est, pour lui comme pour nous, un théorème d'*Analysis situs* énumérative ; aussi a-t-il cherché à le démontrer par des considérations indépendantes de toute propriété métrique, appartenant bien à ce que nous appelons le domaine de l'*Analysis situs*... Aucun de ceux qui ont quelque peu lu Euler, et qui ont été stupéfaits de sa prodigieuse virtuosité technique, ne doutera un seul instant que si Euler avait pensé à faire passer son théorème au second plan et à le déduire d'un de ses corollaires métriques, il n'y eût facilement réussi. »

Lebesgue lui-même a d'ailleurs écrit dans l'un de ses cahiers (2) :

« Pourtant Euler ne comprit pas le véritable intérêt de la proposition, lequel ne pouvait être mis en évidence que par celui qui, au lieu de démontrer la formule d'Euler, montrerait qu'elle n'est pas toujours vraie comme devait le faire Lhuilier en 1813. »

2.3. *La démonstration de Legendre*

Legendre publie en 1794 [*56*, p. 228-229] une très ingénieuse démonstration de notre proposition, dont voici l'idée principale : on choisit à l'intérieur du polyèdre convexe un point quelconque et une sphère de rayon 1, centrée en ce point ; puis on projette le polyèdre sur cette sphère, chaque face se transformant en un polygone sphérique ; on sait que l'aire d'une telle figure s'exprime par la relation :

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ij} - \pi(n_j - 2) \quad (^3).$$

D'après les hypothèses faites sur le polyèdre, la surface est recouverte sans duplicature, ni lacune, et, comme l'aire de la réunion des polygones sphériques est égale à celle de la sphère, on a :

$$4\pi = \sum_{j=1}^{f} \left(\sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ij} - \pi(n_j - 2) \right) = 2\pi e - 2\pi k + 2\pi f,$$

d'où on tire la relation d'Euler.

(1) Il s'agit bien entendu du théorème d'Euler.

(2) Le Pr François Châtelet, qui s'occupe de la publication des œuvres de Lebesgue, nous a obligeamment prêté des cahiers ayant appartenu à l'illustre mathématicien.

(3) α_{ij} = angle n° i du polygone sphérique n° j.
n_i = nombre de côtés du polygone n° i.

On peut formuler différentes remarques sur cette démonstration :

1) Bien que rigoureuse, elle ne s'applique pas aux polyèdres non convexes ; Legendre l'indique d'ailleurs à la suite des définitions du Livre VI de ses *Eléments de géométrie* ; il n'a donc pas démontré le théorème d'Euler, mais l'un de ses cas particuliers.

Il serait cependant faux de croire, avec Ernest de Jonquières, [*47*, p. 315], que « son principe s'oppose à ce qu'elle reçoive l'extension que rendrait nécessaire son application à l'énoncé complet d'Euler », car, ainsi que l'a démontré Lebesgue [*55 b*, p. 326], une légère modification du raisonnement de Legendre permet d'obtenir l'énoncé d'Euler dans toute sa généralité.

Lebesgue a encore établi [1] que cette démonstration peut s'étendre au cas de l'hyperespace, c'est-à-dire à cette généralisation du théorème d'Euler qui porte le nom de Poincaré.

2) Ne mettant en jeu que des éléments étrangers au théorème, la démonstration de Legendre est artificielle ; elle est comme due au hasard. A ce propos voici une remarque de Lebesgue [*55 b*, p. 319] :

« Legendre ne s'est jamais proposé de démontrer le théorème d'Euler, mais ayant bâti à une occasion quelconque des considérations voisines de celles qui figurent dans sa démonstration, il s'est aperçu qu'il avait les éléments nécessaires à cette démonstration. »

Une démonstration en tout point analogue à celle de Legendre se trouve chez Meyer Hirsch [*43*] ; il semble cependant que celui-ci ait simplement traduit le texte de celui-là.

2.4. *Poinsot, le théorème d'Euler, la géométrie de situation*

Le 24 juillet 1809, Poinsot lit à l'Institut un mémoire intitulé *Sur les polygones et les polyèdres* [*73 a*] [2] dont l'intérêt pour notre sujet réside :

1) Dans l'introduction, où il retrace les quelques points connus de l'histoire de la géométrie de situation, qu'il caractérise comme s'occupant « moins de la grandeur et de la proportion des figures, que de l'ordre et de la situation des divers éléments qui les composent ». Il y indique aussi qu'il faut distinguer soigneusement cette « géométrie de situation » de la « géométrie de position » de Carnot.

2) Dans l'*Addition à l'article des polyèdres* [*73 a*, p. 46], où il cite le théorème d'Euler et la démonstration de Legendre. A cette occasion, il écrit :

« Je ferai d'abord observer que l'équation précédente n'a pas seulement lieu pour les solides convexes ordinaires, c'est-à-dire pour ceux dont la surface ne peut être coupée par une droite en plus de deux points : elle subsiste encore pour tout polyèdre qui a des angles solides rentrants, pourvu qu'on puisse trouver, dans l'intérieur du solide, un point qui soit le centre d'une sphère telle que les faces du solide y étant projetées par des lignes menées au centre, il n'y ait sur la sphère aucune duplicature de ces projections... Ce qui convient, comme on voit, à une infinité de polyèdres à angles solides rentrants... »

« Dans les nouveaux solides que nous avons considérés, les projections sur la sphère s'y recouvrent mutuellement plusieurs fois ; mais comme cela est uniforme dans toute l'étendue de la surface, il en résulte également une équation générale entre les trois nombres S, H et A... »

Pour ces polyèdres, Poinsot obtient : $2S + H = A + 3.2$.

Curieusement, Poinsot n'a pas regardé le théorème d'Euler comme une proposition ressortissant à la géométrie de situation, alors qu'il y a rattaché le problème des ponts de Kœnigsberg [*73 a*, p. 17].

2.5. *La généralisation de Cauchy*

Au point de vue qui nous intéresse ici, le mémoire de Cauchy, intitulé *Recherches sur les polyèdres* et lu à l'Institut en février 1811 [*16*], s'articule selon le plan suivant :

1) Deux démonstrations de la relation $e - k + f = 1$ [1] pour un réseau de polygones.

2) Application de celle-ci à la démonstration du théorème d'Euler.

3) Démonstration de $e - k + f - r = 1$, où r est le nombre d'espaces.

A) *Première démonstration* de $e - k + f = 1$.

« Décomposons chacun des polygones en triangles... Soit n le nombre des diagonales tracées dans les différents polygones, $f + n$ sera le nombre des triangles résultant de la décomposition des polygones, et $k + n$ sera le nombre des côtés de ces triangles. Supposons maintenant que l'on enlève successivement les différents triangles, de manière à

[1] Il a indiqué cette démonstration dans un cours inédit donné au Collège de France en 1922-1923. On en retrouve la trace dans les cahiers dont nous avons parlé à la note 2, p. 19.

[2] Il y traite essentiellement des polyèdres de l'espèce supérieure, qu'on nomme aussi polyèdres étoilés.

[1] Nous utilisons la notation introduite à la p. 9.

n'en laisser subsister qu'un seul, en commençant par ceux qui avoisinent le contour extérieur, soient h' le nombre des triangles qui ont un côté compris dans le contour extérieur et h'' le nombre des triangles qui ont alors deux côtés compris dans le même contour. »

On a :

Nombre de triangles restants :	$f + n - (h' + h'')$	$= 1$	(1)
— côtés —	$k + n - (h' + 2h'')$	$= 3$	(2)
— sommets —	$e - h''$	$= 3$	(3)

et (1) + (2) — (3) : $e - k + f = 1$.

La faiblesse de ce raisonnement se situe aux niveaux suivants :

1) Cauchy admet que chaque diagonale donne naissance à une nouvelle région du plan, assertion fausse lorsque l'ensemble n'est pas à connexion simple.

2) Cauchy élimine les différents triangles « de manière à n'en laisser subsister qu'un seul » ; or, la situation illustrée par la figure 4 enseigne qu'une telle élimination peut conduire à plusieurs triangles :

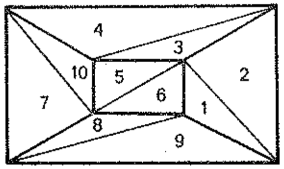


FIG. 4

si on enlève les triangles dans l'ordre indiqué, il reste, après l'ablation du n° 8, deux triangles n'ayant aucun élément commun ; il faudrait donc montrer qu'il existe toujours un ordre de décomposition aboutissant à un seul triangle.

B) *Deuxième démonstration* de $e - k + f = 1$. La deuxième démonstration est sujette aux mêmes critiques ; nous la laisserons de côté.

C) *Démonstration du théorème d'Euler.* A partir de la relation précédente, Cauchy démontre le théorème d'Euler comme suit : si de la surface du polyèdre on supprime une des faces, les faces restantes, dont le nombre est $f - 1$, forment une suite de polygones renfermés dans le contour de la face enlevée, et par suite les nombres e, k, $f - 1$ doivent satisfaire à la formule de Cauchy.

On objectera à cette démonstration que tout polyèdre ne

peut pas être envisagé comme formé par une suite de polygones renfermés dans le contour d'une face librement choisie, ainsi que Cauchy l'admet.

Nous ne voudrions pas quitter le domaine des critiques dont ce raisonnement est passible sans citer ces quelques lignes de J. Hadamard [*39 b*, p. 31] :

« Je considère comme un des faits les plus remarquables de l'histoire de la science, l'erreur qu'a commise Cauchy en croyant démontrer le théorème d'Euler sans introduire aucune hypothèse sur la nature du polyèdre étudié. C'est en effet un principe d'une importance primordiale qui lui a ainsi échappé et qu'il a laissé à Riemann le soin de découvrir : le rôle fondamental de l'*analysis situs* en mathématiques » (1).

D) *Démonstration* de $e - k + f - r = 1$.

« Supposons les divers polyèdres réunis successivement autour de l'un d'eux pris à volonté, soient k', f', e', le nombre d'arêtes, de faces et de sommets de ce premier polyèdre ; k'', e'', f'', les nombres d'arêtes, de sommets et de faces du 2e polyèdre qui ne sont pas communs au premier... Vous aurez, en vertu du théorème d'Euler :

$$e' + f' = k' + 2 \quad (1)$$
$$e'' + f'' = k'' + 1 \quad (2)$$
$$e''' + f''' = k''' + 1 \quad (3)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

« En ajoutant ces équations, qui sont au nombre de r, et observant que :

$$e' + e'' + \ldots = e$$
$$f' + f'' + \ldots = f$$
$$k' + k'' + \ldots = k$$

on aura $e + f = k + r + 1$. »

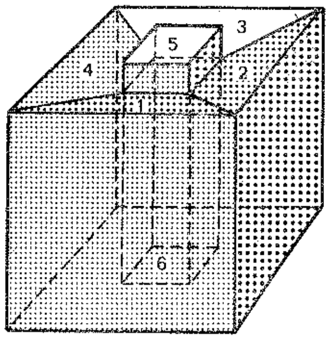


FIG. 5

(1) Voir aussi p. 65.

Les équations (2), (3) etc., indiquent que l'expression $e - k + f - r$ reste constante lors de l'adjonction d'un nouveau polyèdre. Or ceci n'est pas toujours vrai ; ainsi, dans la figure suivante (fig. 5), la mise en place du polyèdre n° 4 donne : variation de $k = 4$, variation de $e = 0$, variation de $f = 2$ et variation de $r = 1$, d'où l'on tire :

$$\text{variation de } e - k + f - r = -1.$$

Le nombre d'équations est égal à r, mais la variation de $e - k + f - r$ n'est pas nulle, ce qui empêche de conclure.

2.6. *Lhuilier et les solides pathologiques*

Le mémoire qui va nous occuper est dû au mathématicien genevois Simon Lhuilier (1750-1840) et a été publié dans les *Annales de Mathématiques* [*59 a*] en 1813 (1); son rédacteur et fondateur, Gergonne, avait la détestable habitude de publier, des travaux qu'on lui soumettait, les seules parties qui l'intéressaient. Il mêlait en outre au texte original des commentaires de son cru, sans toujours l'indiquer ; aussi ne s'étonnera-t-on pas de rencontrer dans ce paragraphe les noms de Gergonne et Lhuilier.

2.6.1. Ce mémoire comprend deux parties distinctes et d'inégale importance pour l'histoire de l'*analysis situs*.

« Dans une première, l'auteur se propose de démontrer le théorème d'Euler, d'une manière qui lui est propre ; son but, dans la seconde, est d'indiquer les diverses sortes d'exceptions auxquelles ce théorème est sujet » [*59 a*, p. 172].

Nous commencerons par esquisser cette démonstration, qui s'applique d'ailleurs exclusivement aux polyèdres convexes : Lhuilier établit en premier lieu que l'énoncé d'Euler est vérifié pour toute pyramide ; il montre ensuite que :

« Si deux polyèdres sont tels que, dans chacun, le nombre de faces, plus le nombre des angles solides surpasse de deux unités le nombre des arêtes ; et si, en même temps, ces deux polyèdres ont une face égale par laquelle ils puissent être appliqués l'un à l'autre ; dans le polyèdre résultant de leur réunion, la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpassera ainsi de deux unités le nombre des arêtes » [*59 a*, p. 172].

Il suffit alors de décomposer chaque polyèdre en pyramides, à partir d'un point quelconque de son intérieur.

(1) Voir aussi [*59 b*].

L'intérêt de cette démonstration réside dans l'application faite par Gergonne au cas de deux dimensions. Le même raisonnement lui permet en effet de montrer que la somme des angles d'un polygone, convexe ou non, vaut « deux angles droits pris autant de fois moins deux que le polygone a de côtés ». Il remarque encore que nulle part en géométrie plane on n'a donné une démonstration correcte de cette proposition.

A ce propos Gergonne écrit :

« La démonstration qu'on en donne communément suppose que le polygone est convexe ou que du moins il existe quelque point, dans son intérieur, par lequel il est impossible de faire passer une droite qui rencontre son périmètre en plus de deux points » [*59 a*, p. 174].

Il note ensuite, et ceci est intéressant :

« Cette conséquence, et le principe d'où elle dérive, ne sont vrais, au surplus, qu'autant que le polygone est terminé par une seule ligne continue. On ne pourrait l'appliquer, par exemple, au polygone annulaire ou couronne polygonale, c'est-à-dire à l'espace plan compris entre deux polygones décrits l'un dans l'autre » [*59 a*, p. 176].

Cette constatation l'amène à la proposition :

« En général, un espace plan peut être compris entre n polygones, extérieurs les uns aux autres, et un polygone qui les renferme tous. Si M est le nombre total des lignes droites qui terminent cet espace, la somme de ses angles intérieurs sera $2[M + 2(n-1)\,90]$. »

Gergonne introduit ici un type de polygones qui n'étaient pas considérés par les géomètres classiques, et que la topologie va mettre à la mode. De plus, il explicite l'influence du nombre de frontières sur la somme des angles du polygone, et suggère, qu'à nombre égal de côtés, elle sert de critère de classification. Ce principe de classification est, à tout prendre, l'analogue bidimensionnel de celui déduit de la formule de Gauss-Bonnet, et dont l'expression mathématique est :

$$\iint_{(F)} K\, dO = 4\pi(1-p)$$

où F est une surface fermée orientable de genre p et K la courbure de Gauss.

2.6.2. Venons-en à la partie essentielle du mémoire de Lhuilier ; il se propose d'établir

« que le théorème d'Euler souffre des exceptions nombreuses, et qu'il n'est vrai, d'une manière générale, que pour les polyèdres qui n'ont point de parties rentrantes, soit quant aux angles plans qui forment les angles solides, soit quant aux angles dièdres ou aux inclinaisons de leurs faces... Ces polyèdres sont, à la vérité, ceux qu'on a coutume de considérer principalement dans les éléments. Cependant la définition des polyèdres, suivant laquelle ils sont des solides terminés de toutes parts, par des figures planes, n'exclut point les polyèdres à parties rentrantes. A moins donc qu'on avertisse (ainsi que le fait Legendre), qu'on s'occupe exclusivement des premiers polyèdres, on s'expose à donner comme générales des conclusions qui ne sont applicables qu'au point de vue particulier sous lequel on a envisagé le sujet dont on s'occupe » [*59 a*, p. 172].

Lhuilier répartit les exceptions en trois classes :

1) Le polyèdre possède une cavité, dont il admet implicitement qu'elle vérifie la relation d'Euler ; il montre que dans ce cas $e - k + f = 4$.

Plus généralement, un corps peut être compris entre n surfaces fermées, extérieures les unes aux autres, et une surface polyèdre fermée qui les renferme toutes. Il obtient alors : $e - k + f = 2(n + 1)$ [*59 a*, p. 184].

2) « La seconde sorte d'exception a lieu, lorsque le polyèdre est annulaire ; c'est-à-dire lorsque, étant d'ailleurs compris sous une surface unique, il a une ouverture qui le traverse de part en part.

« Concevant que l'on fasse à un tel anneau une section plane, en supposant les deux faces de la section séparées, qui la fasse rentrer dans la classe des polyèdres ordinaires... »

Lhuilier aboutit finalement à $e - k + f = 0$, et à :

$$e - k + f = -2(n - 1),$$

si le corps a n ouvertures.

Ces quelques lignes appellent deux remarques :

a) Le nombre n n'est autre que le demi-nombre de Betti à une dimension de la surface donnée [1], c'est-à-dire son genre.

b) Le procédé utilisé par Lhuilier pour faire entrer le polyèdre « dans la classe des polyèdres ordinaires » est analogue à celui qu'emploiera Riemann quelque quarante ans plus tard sous le nom de « Querschnitt » (voir p. 61).

3) Gergonne, qui commente le travail de Lhuilier, poursuit :

« J'avais depuis longtemps remarqué ces deux premières sortes d'exceptions ; mais M. Lhuilier est, je crois, le premier qui ait fait attention à la troisième ; et elle devait d'autant plus facilement échapper à l'observation des géomètres, que les polyèdres auxquels elle est relative ne paraissent pas différer essentiellement de ceux que l'on est dans l'usage de considérer. Cette troisième sorte d'exception a lieu, lorsque quelques-unes des faces du polyèdre sont des polygones compris dans l'exception qui a été développée plus haut ; comme, par exemple, l'une des faces du polyèdre est une couronne polygonale ; ainsi qu'il arrive lorsque le polyèdre résulte de l'union de deux autres polyèdres, par deux faces inégales, dont la plus petite se trouve entièrement comprise dans la plus grande. »

(1) En effet, $e - k + f = -p^1 + 2$ [*82*, p. 134 et 144], c'est-à-dire $-2(n-1) = -p^1 + 2 \Rightarrow 2n = p^1$.

Dans le cas le plus général, où l'une des faces du polyèdre est comprise entre n polygones extérieurs les uns aux autres, et un polygone qui les renferme tous, Lhuilier obtient la relation $e - k + f = n + 2$.

Il termine son mémoire en observant qu'on peut rencontrer les trois sortes d'exceptions dans le même polyèdre :

« Si i représente le nombre des ouvertures qui y sont pratiquées, de part en part, et qu'enfin plusieurs faces soient bornées par des polygones intérieurs au nombre de p, p', p''... pour chacune d'elles, on aura :

$$e - k = -f + 2(i - 0 + 1) + (p + p' + p'' + \ldots)$$

et conséquemment la condition nécessaire et suffisante pour que le polyèdre ne fasse pas exception au théorème d'Euler sera :

$$2i + p + p' + p'' + \ldots = 2.0 \text{ »}$$

[*59 a*, p. 188-189].

2.6.3. Nous avons laissé entendre, à la fin du paragraphe 2.2, que le théorème d'Euler était pour son promoteur une simple proposition de stéréométrie ; et, bien qu'il énonçât une propriété fondamentale pour l'étude des polyèdres, son incidence sur l'orientation de la pensée mathématique était quasi nulle. En revanche, le mémoire de Lhuilier constitue, sous le double aspect suivant, un événement important dans l'histoire des mathématiques. D'abord, il sort la notion de corps solide du cadre trop restreint dans lequel l'avait enfermé la géométrie classique ; de nouvelles formes, possédant des propriétés inconnues, sont ainsi livrées à la réflexion mathématique. Ensuite, et c'est peut-être l'essentiel, avec la prise de conscience de l'erreur contenue dans l'énoncé d'Euler, le mémoire en question apporte les éléments « sans lesquels aucune démonstration véritable n'eût été possible. C'est là, en effet, que Lhuilier montre qu'il convient de préciser à quelles associations de polygones on donne le nom de polyèdre et surtout c'est là qu'est introduite la notion de genre d'un polyèdre » [*55 a*, p. 320-321].

Il convient de joindre à ce mémoire un travail publié par

Hessel [*41*] en 1832 et dont la portée est analogue à celle de la publication de Lhuilier. Il y étudie la variation de l'expression $e - k + f$, et montre qu'elle prend différentes valeurs suivant le type de solide considéré.

C'est dans ce mémoire qu'apparaît l'adjectif « eulérien » pour les polyèdres dont les éléments vérifient la relation d'Euler.

2.7. *Le théorème d'Euler d'après von Staudt*

Lhuilier est donc le premier à observer que l'énoncé d'Euler souffre de nombreuses exceptions. Il doit cependant se contenter de décrire certains cas « pathologiques », sans être à même de les caractériser par une propriété à proprement parler géométrique. Il faut attendre 1847 pour que toute la lumière soit faite sur les différences essentielles entre les polyèdres eulériens et les autres. Dans sa célèbre *Geometrie der Lage* [*86*], Ch. von Staudt (1798-1867) présente enfin le théorème d'Euler muni d'hypothèses correctes. De plus, ce texte contient une démonstration élégante

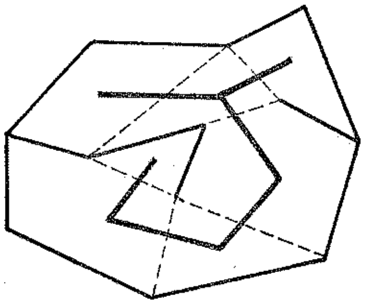


Fig. 6

et rigoureuse de la proposition qui nous occupe et que von Staudt énonce comme suit :

> « Lorsque l'on peut joindre chaque sommet d'un polyèdre à tout autre par une ligne formée d'arêtes, et lorsque sa surface est partagée en deux parties par toute ligne fermée composée d'arêtes passant au plus une fois par un même sommet, le nombre e des sommets plus le nombre f des faces est égal au nombre k des arêtes moins 2. »

En langage moderne — et sans modifier la pensée de l'auteur — on peut présenter la démonstration de von Staudt de la manière suivante : considérons le complexe K formé par l'ensemble

des k arêtes, e sommets et f faces d'un polyèdre. Il est toujours possible de trouver un sous-complexe $B(e', k')$ tel que B est un arbre et $e = e'$. On a $e' - k' = 1$ (1). Construisons ensuite un complexe analogue $B'(e'', k'')$ ne coupant pas le complexe B et dont les sommets sont des points pris arbitrairement dans chaque face. On a donc $e'' = f$ et $e'' - k'' = f - k'' = 1$ (2). D'autre part, $k' + k'' = k$ (3). En additionnant (1) et (2) et en faisant usage de (3), il vient $e - (k' + k'') + f = e - k + f = 2$.

Pour terminer ce paragraphe disons que la démonstration de von Staudt, qui appartient à la théorie des graphes, utilise sans justification les propositions : *a)* tout graphe simplement connexe contient un arbre qui a pour sommets tous les sommets du graphe [1] ; et *b)* dans chaque arbre, le nombre des sommets surpasse d'une unité le nombre des arêtes. Dans la seconde hypothèse, von Staudt définit pratiquement la notion de polyèdre à connexion simple.

2.8. *La généralisation de Schläfli*

On ne saurait clore ce chapitre sans parler d'un mémoire dont l'intérêt pour les mathématiques est exceptionnel, et qui aurait dû valoir à son auteur, Ludwig Schläfli (1814-1895), une des toutes premières places dans le monde mathématique de l'époque.

Le jugement de P. H. Schoute en dit assez sur ce sujet [*13*, p. 12] :

> « Ce mémoire dépasse, en valeur scientifique, une bonne partie de ce qui a paru jusqu'à présent dans le domaine de la géométrie multidimensionnelle. »

Puis il déplore le destin de Schläfli :

> « Ainsi, il éprouva le profond chagrin de ne pas pouvoir faire connaître au monde le fruit de ses études les plus profondes, lui qui était en avance sur son temps. »

Malheureusement, seuls certains extraits en ont pu être publiés du vivant de son auteur [*80 a* et *80 b*].

Avant de dire quelques mots de ce travail, indiquons-en les tribulations : écrit en 1850-1851, il est envoyé à l'Académie impériale des Sciences de Vienne afin d'y être imprimé ; cependant, cette institution renonce à prendre en charge cet ouvrage, eu égard aux dimensions inusitées du mémoire. Devant ce refus, Steiner insiste auprès de Schläfli pour qu'il tente d'en faire

[1] Voir aussi p. 155.

paraître au moins des fragments (1). Enfin Schläfli se décide à envoyer son travail au *Journal de Crelle*, où il semble recevoir un accueil favorable ; toutefois, alors que l'affaire paraît en bonne voie, on change d'avis à Berlin, et le mémoire retourne à Berne. Ce n'est qu'en 1901, soit six ans après la mort de son auteur, que *Vielfache Continuität* est éditée sous les auspices de la Société helvétique des Sciences naturelles [*80 c*].

Dans une lettre au secrétaire de l'Académie des Sciences de Vienne [*37*, p. 83, lettre de décembre 1851], Schläfli présente son travail comme suit :

« Le mémoire, que j'ai l'honneur de soumettre à l'Académie impériale des Sciences, contient une tentative visant à fonder et à développer un nouveau rameau de l'analyse, qui soit en même temps une géométrie analytique à n dimensions, contenant comme cas particulier la géométrie analytique à 2 et 3 dimensions... Comme la géométrie ordinaire peut être nommée théorie d'un continu trois fois étendu, j'ai nommé ma théorie, théorie d'un continu multiplement étendu. »

Dans ce volumineux article, un passage nous intéresse spécialement ; il concerne une proposition que Schläfli démontre, et qui est une généralisation du théorème d'Euler. Nous citerons directement la traduction donnée par l'auteur en 1855 [*80 a*] :

« Dans cette partie générale, je ne ferai qu'énoncer ici un théorème semblable à celui d'Euler sur les polyèdres dans l'espace.

« Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ respectivement les nombres des sommets, des côtés et arêtes des polygones plans, etc., des derniers périchèmes du polychème linéaire en question, et enfin soit a_n, ou l'unité qui convient au véritable polychème, tel que je l'ai défini, ou zéro qui marque la non-existence d'un pareil polychème, lorsque les derniers périchèmes ne ferment pas l'étendue d'ordre n, mais bien constituent, pour ainsi dire, une calotte ouverte par une seule lacune dont le bord est représenté moyennant une intégrale brisée et continue d'ordre $n - 2$. Alors on aura :

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots + (-1)^{n-1} a^{n-1} + (-1)^n a^n = 1.$$

« La démonstration de ce théorème général ne présente point de difficultés. Je présume même que M. Cauchy l'a déjà donnée dans le *Journal de l'Ecole polytechnique*, t. 9, cah. 16, p. 80 » [*16*].

Nous ne nous attarderons pas sur la démonstration de Schläfli ; bornons-nous à signaler qu'elle se bâtit selon le schéma suivant :

Moyen : raisonnement par induction complète.

(1) « ... aus der weltüberstürmenden erdewälzenden Abhandlung einen Auszug zu machen » [*37*, p. 41, lettre du 15 octobre 1853].

Première hypothèse de récurrence : le théorème d'Euler est établi pour R_{n-1}.

Conclusion : le théorème est vrai pour R_n.

Démonstration : selon le procédé de Cauchy (voir p. 22, alinéa C).

Deuxième hypothèse de récurrence : le théorème est vrai pour une association de k polytopes de R_n.

Conclusion : le théorème est vrai pour une association de $k + 1$ polytopes de R_n.

Le travail de Schläfli fut ignoré durant fort longtemps ; aussi est-ce parfois à Stringham [*88*] que l'on fait remonter cette généralisation du théorème d'Euler. Dans la période qui nous occupe, on peut encore citer un travail de V. Eberhard intitulé *Un théorème de topologie* [*27*] et dont l'essentiel traite du théorème d'Euler dans le cas des variétés à n dimensions.

Remarque finale

Nous n'avions pas pour but, en rédigeant ce chapitre, d'écrire une histoire exhaustive du théorème d'Euler ; nous nous placions plutôt dans la perspective d'une histoire de la topologie.

Le lecteur désireux d'approfondir cette question trouvera dans [*12*] et [*20*, p. 58 sq.] des renseignements bibliographiques complémentaires.

§ 3. LE RÔLE DU PRINCE DES MATHÉMATICIENS

Gauss n'a pas consacré de publication à la topologie. Point de formule, point de théorème qui rappelle l'illustre nom. Gauss eut pourtant sur le développement de cette discipline une influence considérable, qui se manifeste sous diverses formes. Nous les examinerons successivement au cours de ce paragraphe.

3.1. *L'influence directe*

Gauss est né en 1777. Eu égard à son comportement, on peut le rattacher aux savants du XVIIIe siècle : il ne publie presque pas, communique ses découvertes — quand il les communique — par ses conversations et sa volumineuse correspondance. Il n'a guère d'élèves, tout au plus quelques disciples et collègues. L'examen de ses archives montre que c'est en 1794, soit au début de sa carrière scientifique, que Gauss se lia d'amitié avec l'*analysis situs*. Il l'utilise pratiquement et sciemment quand, en 1799, il démontre le théorème fondamental de l'algèbre. On trouve dans cette longue démonstration la phrase suivante :

« De plus, il découle de ce raisonnement, qui appartient à la géométrie de situation (1) dont les principes ne sont pas moins valables que ceux de la géométrie des grandeurs... » (2).

Il faut lire la démonstration originale de Gauss pour se rendre compte à quel degré de perfection il avait amené la théorie des nombres complexes. Constamment guidé par elle, il ne lui a cependant pas fait un appel direct, « car à cette époque il fallait éviter toute ingérence des grandeurs imaginaires » (3). De naturelle et simple qu'elle est lorsque l'on s'appuie sur la théorie des nombres complexes [*68*, p. 69], cette démonstration devient mystérieuse et compliquée aussitôt que l'on prétend à n'en point faire usage.

Conscient de ce que toute une science se cache derrière la vague définition d'Euler, il ne se fit pas faute de mentionner son existence dans ses conversations et dans sa correspondance. Ainsi :

a) Dans une lettre à Olbers, datée du 21 novembre 1802, Gauss écrit [*33 d*, p. 103, ou *10 b*, p. 67] (4) :

« ... il va sortir prochainement un ouvrage de Carnot, *Géométrie de position* (5), que j'attends avec une extrême curiosité. Ce sujet, peu cultivé jusqu'ici — nous en devons les quelques rares esquisses à Euler et à Vandermonde (6), un géomètre que j'estime beaucoup — doit ouvrir un champ nouveau et former un rameau très intéressant de la théorie des grandeurs. »

b) Dans une lettre du 30 octobre 1825 [33 *b*, p. 400, ou *10 b*, p. 68], Gauss renseigne son ami Schumacher sur les résultats qu'il a obtenus en théorie des surfaces courbes, sujet qu'il travaillait depuis plusieurs années déjà. On y trouve l'intéressante observation suivante, qui révèle à quel point son auteur avait

(1) *Geometrie der Lage* dans le texte.
(2) Le raisonnement dont il est question n'offre pas d'intérêt par lui-même.
(3) Relevons à ce propos que Gauss, comme il l'indique par ailleurs, n'avait pas encore résolu le « problème métaphysique » posé par la théorie des nombres complexes.
(4) Presque tous les renseignements d'ordre bibliographique de ce chapitre sont tirés de l'ouvrage de Stäckel [*10 b*]. Signalons en passant que celui-ci se trompe sur la date de cette lettre ; elle ne date en effet pas du 12-10-1802 mais du 21-11-1802.
(5) Ce livre, paru en 1803, n'a pas de rapport avec la topologie.
(6) Les *Remarques sur les problèmes de situation* (1771) de Vandermonde [*91*] traitent du problème de la marche du cavalier aux échecs qui avait été résolu par Euler en 1759.

saisi l'utilité de la topologie pour l'étude des surfaces, et aussi que le génie est une longue patience :

« On doit suivre l'arbre jusque dans ses dernières racines, et la plupart d'entre elles me coûtent de pénibles efforts, qui parfois s'étendent sur des semaines. Certaines appartiennent d'ailleurs à la *geometria situs*, un domaine presque complètement inexploré. »

c) Dans l'excellente biographie de Gauss, que l'on doit à Sartorius von Waltershausen, on trouve ce passage [*93*, p. 88] :

« Il [Gauss] plaçait une espérance extraordinaire dans le développement de la *geometria situs*, un domaine encore complètement inexploré que notre calcul actuel est inapte à gouverner. »

d) C'est à l'instigation de Gauss que Listing écrit ses deux premiers mémoires qui, sans renfermer de découvertes capitales, n'en sont pas moins d'une grande importance pour l'*analysis situs*. On peut conjecturer que c'est aussi par l'intermédiaire de Gauss que Möbius aborde l'étude de la topologie, bien qu'il soit difficile de l'affirmer de façon péremptoire. Nous reviendrons plus tard sur cette question.

3.2. *L'influence indirecte*

Plus implicite, mais non moins efficace, fut l'influence de certains écrits de Gauss. Sans s'occuper à proprement parler de topologie, ceux-ci contiennent des idées générales nécessaires à son développement.

A cet égard, on doit avant toutes choses citer les célèbres *Disquisitiones* de 1827 [*33 f* ou *33 f'*].

a) « De même qu'en imaginant par le centre de notre sphère auxiliaire des droites respectivement parallèles à chacune des normales d'une surface courbe, à chaque point déterminé de la deuxième surface vient correspondre un point déterminé de la première ; de la même manière, toute ligne ou toute figure tracée sur la surface sera représentée par une ligne ou par une figure tracée sur la surface sphérique. Dans la comparaison des deux figures qui se correspondent ainsi, et dont l'une sera comme l'image de l'autre, on peut se placer à deux points de vue : on peut avoir égard seulement aux quantités ; ou bien ne s'occuper que des relations de position, abstraction faite des relations de quantité » (art. 6).

b) Dans le même article, Gauss introduit la *curvatura integra*, dont on sait l'intérêt pour notre science. Nous en reparlerons au chapitre consacré à W. Dyck (voir p. 151).

c) Il termine cet article par la remarque suivante, à laquelle la traduction allemande a attribué une portée qu'elle ne semble pas avoir dans le texte original :

« Au surplus, nous croyons devoir réserver pour une autre occasion des explications plus amplement développées, concernant les figures envisagées au point de vue le plus général. »

Du texte latin original :

« Attamen uberiorem hujus argumenti de figuris generalissime conceptis expositionem ad aliam occasionem nobis reservare debemus » [*33 f*].

A. Wangerin donne la traduction suivante :

« Indessen müssen wir die weitere Erörterung dieses Gegenstandes, der die allgemeinste Auffassung von Figuren betrifft, uns eine andere Gelegenheit vorbehalten » [*33 f''*],
c'est-à-dire : « Nous croyons devoir réserver pour une autre occasion des explications plus amplement développées sur cette matière qui (c'est-à-dire laquelle matière) concerne la façon la plus générale d'envisager les figures. »

Cette version fait donc dire à Gauss que la *curvatura integra* et les considérations qui s'y rapportent contiennent des propriétés beaucoup plus générales que celles habituellement étudiées en géométrie différentielle. Il ne semble pas que cette prophétie se trouve dans la version originale.

d) « Les considérations que nous venons d'exposer se lient à un mode particulier d'envisager les surfaces, qui nous paraît digne au plus haut point d'occuper les géomètres. En effet, si l'on considère la surface non comme la limite d'un solide, mais bien comme un solide flexible et inextensible, dont une dimension est censée s'évanouir, les propriétés de la surface dépendent en partie de la forme particulière qu'elle peut prendre, par suite d'une flexion telle qu'on voudra, et seront en partie absolues et invariables, quelle que soit cette forme. C'est à cette dernière sorte de propriété, dont l'étude ouvre à la géométrie un champ nouveau et très vaste, que se rapportent la mesure de la courbure et la courbure totale, dans le sens que nous donnons à ces expressions... » (art. 13).

A la fin de l'article 12, Gauss énonce son célèbre *theorema egregium* :

« Si une surface courbe est appliquée sur une autre surface courbe quelconque, la mesure de la courbure en chaque point reste invariable.
« Par suite, la courbure intégrale d'une portion finie quelconque de la surface ne changera pas. »

Jointes au texte précédent, ces dernières lignes attirent l'attention sur les déformations isométriques et leurs invariants. Cette étape nécessaire préfigure et annonce l'étude plus générale des déformations topologiques. Le problème mis à la mode par ce travail de Gauss va intéresser de nombreux chercheurs (1). C'est assurément en voulant le généraliser que Jordan a écrit le premier de ses mémoires topologiques de 1866 (voir p. 112).

De plus, l'usage assez fréquent qu'il fait de l'idée d'application d'une surface sur une autre, telle que « à tout point de la première corresponde un point bien déterminé de la seconde » (art. 12), allait contribuer à faire de ce concept l'une des clefs de la mathématique contemporaine (voir la remarque de Clifford, p. 121). Gauss a réussi à s'élever bien au-dessus du cas particulier que constitue l'application isométrique qui est au centre du mémoire dont nous venons de parler. Ainsi, dans une lettre à Hansen [*10 b*, p. 110] datée du 11 décembre 1825, on trouve ces lignes remarquables :

« Vous avez entièrement raison de prétendre que dans toutes les constructions de cartes, la similitude dans les plus petites parties constitue la condition essentielle, que l'on ne peut négliger que dans des circonstances tout à fait spéciales. Il serait d'ailleurs utile de créer une dénomination propre aux représentations qui remplissent cette condition. *En outre, elles ne sont que des cas particuliers de la représentation la plus générale d'une surface sur une autre qui à chaque point de l'une fait correspondre un point de l'autre, et ceci d'une facon continue* » (2).

Toujours dans le domaine des idées générales, il faut mentionner le concept d'espace à n dimensions, que Gauss est assurément le premier à définir et à utiliser (3). Nous citerons un texte tiré d'un cours de Gauss sur les moindres carrés [*33 c*, p. 469] et retrouvé dans les notes de A. Ritter (4) :

« Les choses se passent différemment lorsque certaines contraintes ne peuvent s'exprimer que par des inéquations de la forme $f(\xi, \eta, \varsigma) \geqslant 0$... Avec l'aide de chacune des équations de contrainte, on peut éliminer une variable de la fonction Z. Si nous appelons « espace analytique à N dimensions » l'ensemble de toutes les valeurs de celle-ci, alors chaque équation aura pour effet de diminuer d'une unité la dimension de l'espace

(1) Ce problème, qui a servi de thème au Grand Prix de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1859, a été notamment traité par Bour, Bonnet, Codazzi.
(2) C'est nous qui soulignons.
(3) On peut affirmer que Gauss était en possession de ce concept avant 1816 [*33 c*, p. 481].
(4) Ce texte a été repris dans la dissertation qu'il a effectuée sous la direction de Gauss, et qu'il a publiée en 1853 [*79*].

analytique de la fonction Z. Chaque inéquation, en revanche, restreint le domaine de variation, sans diminuer le nombre de dimensions ; elle partage tout l'espace analytique de la fonction en deux parties, dont l'une est à considérer comme possible et l'autre comme impossible. »

3.3. *Les découvertes de Gauss*

L'étude des manuscrits de Gauss témoigne qu'il a lui-même traité de sujets topologiques.

Il s'agit d'abord du problème des nœuds, qu'il a envisagé à plusieurs reprises au cours de sa carrière. On trouve dans ses papiers, outre quelques dessins de nœuds datant de 1794 et portant le titre *A collection of knots*, deux études intitulées *Zur Geometria situs* et *Zur Geometrie der Lage für zwei Raumdimensionen* consacrées exclusivement à ce genre de questions [*33 b*, p. 268].

Ensuite, on doit signaler un texte du 22 janvier 1833 retrouvé dans l'un de ses cahiers d'électrodynamique et souvent cité depuis que Maxwell l'a publié [*65 b*, p. 43 ou *65 b'*, p. 47] :

« De la *geometria situs*, que Leibniz a pressentie, et dans laquelle seuls quelques géomètres (Euler, Vandermonde) ont jeté un faible regard, nous ne savons, après cent cinquante ans, guère plus que rien.

« Un problème fondamental se situant à la limite de la *geometria situs* et de la *geometria magnitudinis* consiste à déterminer le nombre d'enlacements de deux courbes fermées ou infinies.

« Soient x, y, z, respectivement x', y', z', les coordonnées d'un point appartenant à la première, respectivement à la deuxième courbe, et

$$\iint \frac{(x'-x)\ (dy\ dz'-dz\ dy')+(y'-y)\ (dz\ dx'-dx\ dz') + (z'-z)\ (dx\ dy'-dy\ dx')}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{3/2}} = \mathrm{V};$$

alors cette intégrale étendue aux deux lignes est égale à $4\pi m$ où m représente le nombre d'enlacements. On obtient la même valeur lorsque les deux lignes sont interchangées. »

On reconnaît dans ces lignes l'embryon de la théorie de la caractéristique de Kronecker, dont nous aurons à reparler au chapitre consacré à Dyck (voir p. 151).

Le passage suivant d'une lettre de Möbius à Gauss [*10 b*, p. 69], datée du 2 février 1847, fait voir que le Prince des Mathématiciens était allé fort loin dans cette étude :

« D'après ce que m'a dit W. Weber, vous envisagez depuis plusieurs années un ouvrage traitant de tous les enlacements possibles d'un fil, ceci comme introduction ou comme préparation à la théorie des courants électriques et magnétiques. Ne peut-on pas espérer la parution prochaine de ce traité ? L'accomplissement de ce vœu me comblerait, comme d'ailleurs il comblerait d'autres personnes. »

Nous examinerons, pour terminer, un intéressant texte écrit par Gauss aux environs de 1840 [*33 d*, p. 407-410] (¹), et que l'on peut considérer comme une ébauche de la théorie de l'ordre de connexion. Gauss commence par quelques définitions : il nomme *zug* une suite continue de nombres complexes, et *schicht* un ensemble de nombres complexes contenus dans une région limitée par un ou plusieurs *zug* fermés. « Dans ce dernier cas, l'un des *zug* forme la séparation d'avec le domaine infini, les autres servant à exclure de l'intérieur un ou plusieurs *schicht*. » Puis les deux sens de parcours d'une figure sont définis l'un comme laissant la surface constamment à gauche, l'autre la laissant constamment à droite. Ainsi, dans la figure suivante « Z et z forment la frontière complète du *schicht* connexe (²) Σ. »

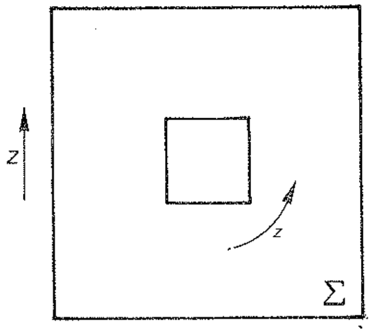


FIG. 7

Ensuite il énonce le théorème :

« Un *schicht* Σ limité par 2 ou plusieurs (n) *zug* fermés peut être partagé en autant de *schicht* partiels, chacun ayant un seul *zug* pour frontière. »

La démonstration qui suit cet énoncé, outre son intérêt topologique, donne une idée de la rigueur que Gauss exigeait. A une époque où l'on ne parlait pas encore d'axiomatique, il était difficile d'être plus précis.

Voici cette démonstration :

« Il suffira, pour démontrer ce théorème, d'établir que Σ est décomposable en deux nouveaux *schicht* Σ′ et Σ″, de telle façon qu'ils

(¹) Pour plus de précision sur cette date, voir [*10 a*, p. 89].
(²) *Zusammenhängend*.

soient limités respectivement par 1 et par $n-1$ *zug*. Soient Z et z 2 *zug* frontières différents, $\zeta' = C'c'$ et $\zeta = Cc$ 2 autres *zug* tels que (1) : 1) $C, C' \in Z$ et $c, c' \in z$; 2) $\zeta \cap \zeta' = \varnothing$; 3) le *schicht* dont $CC'\,c'\,cC$ est frontière appartient complètement à Σ. On se persuadera de la possibilité de réaliser ces différentes conditions en observant que, par suite de la continuité de Σ, Z et z peuvent être reliés par un *zug* Cc entièrement situé dans Σ, et qu'en cas de besoin il est possible de choisir $C'c'$ aussi près que l'on voudra de Cc. Le *schicht* dont $CC'\,c'\,cC$ est la frontière peut jouer le rôle choisi pour Σ' ; si on appelle ensuite Σ'' le *schicht* obtenu en retranchant Σ' de Σ, on peut écrire (2) :

$$Rd\,\Sigma'' = Rd\,\Sigma - (Z + z) + Ccc''\,c'\,C'\,C''\,c,$$

où C'' et c'' sont des points appartenant respectivement à $z - cc'$ et à $Z - CC'$.

« On peut encore montrer que Σ'' forme bien un *schicht* continu et d'un seul tenant ; je ne le ferai pas, en partie parce que cela exigerait quelques autres considérations, et en partie parce que, pour notre but actuel, il est suffisant de savoir que Σ'' est un *schicht* d'un seul tenant, dont le nombre de frontières est $n-1$.

« On remarquera, de plus, que la somme des *zug* frontières de Σ' et de Σ'' se compose des *zug* de Σ ainsi que des *zug* ζ et ζ', chacun parcouru deux fois. On voit cependant que $\zeta \in Rd\,\Sigma'$ et $\zeta \in Rd\,\Sigma''$ seront de sens contraire, ce qui vaut aussi pour ζ' (3). Lorsqu'un même *zug* est parcouru une fois dans un sens et une fois dans l'autre, on peut regarder ces deux parcours comme se détruisant mutuellement et considérer que :

$$Rd\,\Sigma = Rd\,\Sigma' + Rd\,\Sigma''. »$$

En topologie, comme ailleurs, Gauss a été bien en avance sur son temps ; malheureusement, fidèle à sa devise *Pauca sed matura* (4), il n'a rien publié sur le sujet.

(1) Nous nous sommes permis, afin de soulager un peu l'écriture, d'utiliser quelques notations modernes.
(2) *Rd* pour « frontière de ».
(3) Gauss s'appuie ici sur des arguments analytiques qui sont développés aux pages 409 et 410 de l'opuscule cité.
(4) « Peu mais mûr. »

DEUXIÈME PARTIE

LES JEUNES ANNÉES

Chapitre Premier

LES PREMIERS PAS DANS LE MONDE : L'ŒUVRE DE J. B. LISTING

Ce chapitre est réservé à l'étude des travaux topologiques de Johann Benedikt Listing (1808-1882) intitulés *Vorstudien zur Topologie* (1847) [*61 a*] et *Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern* (1861) [*61 b*]. L'entorse faite à l'ordre chronologique — les travaux de Riemann sont antérieurs au deuxième ouvrage de Listing — provient de ce que le *Census* ... se rattache d'une façon naturelle au développement du théorème d'Euler. Cela est si vrai que nous avons hésité à le placer à la fin du paragraphe 2 de la première partie. Cependant, par l'esprit nouveau qui y règne, nous avons opté pour le présent choix.

§ 1. formation et influences

J. B. Listing arrive à Göttingen en 1829. A partir de l'hiver 1832, il devient l'élève assidu de Gauss. Durant cette période, ce dernier entretient son jeune disciple de *geometria situs*, comme le montre une lettre (1) que Listing écrit en avril 1836 à l'un de ses amis et où apparaît pour la première fois le mot topologie. En voici un extrait :

« Leibniz est probablement le premier à avoir pensé, mais seulement à avoir pensé, à son (2) développement théorique ; depuis cet auteur, plus rien n'a été fait dans cette direction. Le champ semblait trop vaste, les difficultés trop grandes et la langue trop pauvre. C'est Gauss qui

(1) Cette lettre se trouve parmi les papiers de Listing, conservés à la Bibliothèque universitaire de Göttingen.
(2) Il s'agit bien entendu d'*analysis situs*.

m'incita à m'occuper de ce domaine, lors de mes nombreux travaux pratiques à l'observatoire de Göttingen. Leibniz définissait cette science comme l'étude de la connexion et des lois de la situation réciproque des corps dans l'espace, indépendamment des rapports de grandeur, qui ressortissent à la géométrie ; il lui donna le nom d'*analysis situs*. Comme cependant le terme de géométrie ne peut décemment caractériser une science d'où les notions de mesure et d'extension sont exclues, comme en outre on a déjà attribué la dénomination géométrie de position à une autre discipline, et comme, finalement, notre science n'existe pas encore, je me servirai du nom, convenable me semble-t-il, de topologie. »

Puis plus loin :

« Une définition de la topologie pourrait être : étude des lois qualitatives des relations de lieu. Cette science est susceptible, j'en ai la conviction profonde, d'une méthode de recherche exacte. »

Voyons maintenant sous quelles influences Listing a donné ses différents travaux. Ainsi que nous venons de le découvrir, c'est Gauss qui le fait nommer, en 1839, professeur extraordinaire de physique à Göttingen. Dès cette date, les deux hommes ont de fréquents contacts, au cours desquels il leur arrive de parler de topologie, comme le montre le journal de Listing [1]. On est en outre en droit de penser que Gauss eut à cœur de suivre, sinon d'aider, le développement d'une science dont il est le parrain, si ce n'est le père. Aussi, l'influence de Gauss sur le premier travail topologique de Listing ne laisse-t-elle pas d'être importante. Il est en revanche difficile d'être aussi catégorique dans le cas de *Census*..., publié six ans après la mort de Gauss. Seul le texte suivant pourrait nous le faire penser. Dans une courte autobiographie [2], Listing écrit :

« La recherche des relations spatiales d'ordre modal (non quantitatives), que Leibniz avait déjà définies, est depuis fort longtemps l'objet de mes préoccupations. J'ai publié, en partie à l'instigation de Gauss, un essai sur cette discipline quasi mathématique où tout reste encore à faire, dans les *Vorstudien zur Topologie*. J'espère pouvoir publier prochainement d'autres études traitant de ces questions. »

Ce qui indique au moins que le projet de *Census*... était déjà élaboré du vivant de Gauss.

Le journal de Listing montre qu'il s'entretint de topologie avec Dedekind (22 juillet 1856) et avec Dirichlet (25 juin 1858). Une autre influence certaine est celle de Riemann. Il est en effet sûr que Listing eut connaissance des célèbres mémoires de 1851

(1) Conservé à la Bibliothèque universitaire de Göttingen.
(2) Nous avons retrouvé ce texte dans les papiers de Listing.

et 1857 (voir p. 68 ff.). C'est ainsi que l'on trouve dans les ébauches du *Census*... les phrases :

« *) Vgl. Riemann : Lehrsätze aus der Analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialen in Crelle's journal f.d.r.u.a. Math, Bd. 45 » et « die dortige dritte Figur als Beispiel gegebene dreifachzusammenhängende d.h. zweifach cyclodische Figur »,

disposées comme si elles étaient destinées à servir de note au bas d'une page.

Du reste, il suffit de penser que Riemann travaillait, au moment de la publication de sa thèse, dans un séminaire dont Listing était l'un des patrons.

Empressons-nous d'ajouter que ce qui précède n'enlève rien à l'originalité du travail de Listing. Nous pensons simplement qu'il est toujours intéressant de connaître le climat mathématique dans lequel une œuvre voit le jour, étant bien entendu que la vérité sort rarement tout armée de l'esprit d'un chercheur ; bien au contraire, la pression du « courant de culture mathématique » est prépondérante.

§ 2. LES « VORSTUDIEN... »

L'intérêt de cet ouvrage réside, en ce qui nous regarde, dans le titre et dans l'introduction. Quant au développement, il s'occupe de problèmes de nœuds, sujet que nous avons exclu de notre étude, ainsi que de questions rarement considérées aujourd'hui comme relevant de la topologie.

Les *Vorstudien*... sont le premier ouvrage consacré nommément à la topologie ; c'est d'ailleurs là que ce terme fait son apparition officielle. Dans les pages du début, Listing apporte quelques précisions d'ordre historique sur Vandermonde et Leibniz. Il indique que l'*analysis situs*, dont ce dernier avait parlé, est fort différente de la science que lui, Listing, essaie de définir et de caractériser aux pages 814-817 ; en voici l'essentiel :

« Lorsque l'on considère des formes spatiales, on peut se placer au point de vue de la quantité ou à celui de la qualité (Modalität). Aussi variés que soient leurs méthodes et leur objet, les recherches de la géométrie accordent, dans leurs développements actuels, la priorité à la première catégorie ; aussi, la géométrie a-t-elle de tout temps été regardée comme une partie de la science des grandeurs, ainsi d'ailleurs que son nom l'indique. Le deuxième point de vue, celui de la qualité, c'est-à-dire celui qui se rapporte aux questions de position et d'ordre, ne fut étudié en géométrie que pour autant qu'il était possible de l'adapter à celui de la quantité. »

Et plus loin :

« Si l'on fait abstraction des quelques rares contributions dont nous venons de parler [1], c'est de l'avenir que le côté qualitatif de la géométrie attendra son développement. L'étonnement que peut engendrer le fait que rien ne s'est accompli dans ce domaine du savoir, depuis l'instigation de Leibniz, se tempérera peut-être si l'on songe aux multiples difficultés que l'on rencontre lors de la mise sur pied de méthodes efficaces et convenables permettant de ramener l'intuition spatiale à des concepts, et à l'insuffisance de la langue. L'importance du sujet m'ayant été signalée à maintes occasions par le plus grand géomètre de notre époque, je me suis essayé depuis longtemps à l'analyse de certains cas qui relèvent de notre science.

« Qu'il me soit permis d'utiliser pour ce genre de recherches sur les complexes spatiaux le mot topologie, en lieu et place de la dénomination *geometria situs* proposée par Leibniz, qui rappelle l'idée de mesure et qui, en outre, se rapproche par trop de l'expression « géométrie de position » [2] qu'il est d'usage d'employer dans un domaine différent de celui que nous considérons. Par topologie, nous entendrons donc l'étude des aspects qualitatifs des formes spatiales ou des lois de la connexion, de la position mutuelle et de l'ordre des points, droites, surfaces, corps ainsi que de leurs parties ou de leurs réunions, abstraction faite de leurs rapports de mesure et de grandeur.

« Pour s'élever au rang d'une science exacte, vers lequel tout semble l'appeler, la topologie doit chercher à ramener les faits qui lui sont suggérés par l'intuition spatiale à des concepts aussi simples que possible... »

En guise de commentaire, nous relèverons d'abord l'aspect prophétique de certains passages de ce texte, ensuite l'insistance avec laquelle Listing se plaît à décrire l'*analysis situs* comme une géométrie qualitative.

§ 3. LE « CENSUS »

3.1. *Généralités*

Après cent années d'histoire (1750-1850), le théorème d'Euler a parcouru les différents stades assignés à un honnête théorème : apparition empirique, énoncé approximatif, démonstration dans un cas particulier, énoncé exact, généralisation. On doit cependant remarquer que, durant ce siècle consacré au développement du théorème d'Euler, on n'a guère parlé d'*analysis situs* ; ni Euler, ni Legendre, ni Poinsot, pas plus que Cauchy,

(1) Il s'agit des travaux de Leibniz et Vandermonde.
(2) En français dans le texte.

Lhuilier, von Staudt ou Schläfli n'ont reconnu — ou signalé — le lien entre le théorème d'Euler et la topologie. Il appartint à Listing de combler cette lacune. Dans son mémoire de 1861, Listing concentre ses efforts sur l'extension du théorème d'Euler au cas des complexes spatiaux les plus généraux [1]. Pour cela il détermine l'influence de la nature topologique de chaque constituant du complexe, en faisant sciemment usage de la topologie. C'est là une innovation de taille.

Après quelques généralités, nous résumerons ce long mémoire de 86 pages et 57 figures, afin d'en montrer la structure, d'en éclairer les idées directrices et par là d'en saisir l'intérêt pour le développement de notre science.

Jusqu'aux environs de 1810, un polyèdre est, à n'en pas douter, « un corps convexe compris entre des faces planes » [*51*, p. 816], bien que la convexité soit le plus souvent sous-entendue ; l'application du théorème d'Euler n'offre alors aucune difficulté. La situation se complique lorsqu'on étudie des polyèdres particuliers, à la manière de ceux rencontrés dans l'article de Lhuilier. Pour déterminer la caractéristique d'Euler $e - k + f$, il devient nécessaire d'introduire des termes supplémentaires définis d'une façon très intuitive et qui sont parfois difficiles à obtenir. Quand Listing empoigna la question, on connaissait donc les solides eulériens et les solides pathologiques de Lhuilier, eux-mêmes répartis en classe, selon les différents nombres $i, o, p, p', p'' \ldots$. Il y avait dès lors essentiellement deux attitudes possibles. La première consistait à refuser, avec E. de Jonquières [*47a*, p. 111], l'appellation de polyèdres aux solides ne vérifiant pas la relation d'Euler : c'était tourner la difficulté en supprimant le problème. Ensuite, on pouvait se placer à l'autre extrême et envisager des « complexes spatiaux, par exemple des agrégats quelconques de points, de lignes (droites ou non) et de surfaces (planes ou non) par lesquels l'espace infini est ou n'est pas partagé » [*61 b*, p. 99]. Cette conception, de beaucoup la plus constructive, allait livrer à la réflexion mathématique toute une catégorie d'êtres géométriques nouveaux, que Listing est vraisemblablement le premier à considérer, à tout le moins au point de vue qui nous intéresse ici. A la page 111 du même mémoire, Listing écrit :

« Plus la généralité visée est grande et plus les concepts de départ devront être rigoureusement définis, si l'on ne veut pas courir le risque de perdre en précision ce que l'on a gagné en généralité. »

(1) Avec bien sûr toujours l'hypothèse de triangulabilité (voir p. 1).

Phrase remarquable, qui caractérise bien l'une des composantes principales de l'état d'esprit qui se fait jour peu à peu dans le continuum de la pensée mathématique au cours du XIXe siècle : le besoin de définitions précises comme base de toute théorie.

Ayant donc opté pour cette voie, il se propose le but suivant :

« Les différents éléments, définis d'une manière précise, ainsi que les complexes qu'ils engendrent seront tout d'abord comptés comme dans le théorème d'Euler, à ceci près toutefois, qu'au nombre de sommets, d'arêtes et de faces, nous joindrons le nombre d'espaces. Ces différents nombres seront liés entre eux par une certaine relation ; il apparaîtra alors que la relation existant entre ces divers éléments contient, outre ceux-ci, des termes supplémentaires pouvant être considérés comme une modification apportée à chaque élément... Celle-ci se compose en quelque sorte d'un cens déterminé par l'appartenance des éléments d'une même catégorie à certaines classes. Ce point est si important dans la généralisation que je me propose d'obtenir, que je n'ai pas hésité à intituler mon mémoire *Cens des complexes spatiaux*.

« L'énoncé le plus général consistait à réunir les nombres de constituants respectifs en un agrégat algébrique, ceux correspondant aux constituants de dimension paire étant comptés positivement, les autres négativement... » [*61 b*, p. 99].

C'est, à notre connaissance, la première fois qu'un auteur groupe les objets dont les nombres entrent dans le théorème d'Euler d'après la parité de leur dimension.

On simplifie l'analyse du *Census*... en répartissant ses 46 paragraphes comme suit :

§ 1 à § 6 : Définition des complexes spatiaux et de leurs constituants.

§ 7 à § 18 : Classification de ces complexes à partir de critères topologiques.

§ 19 à § 37 : Théorèmes préliminaires établissant des relations entre les différents nombres de constituants de certains complexes particuliers.

§ 38 à § 46 : Le théorème fondamental et sa généralisation.

3.2. *Définition des complexes spatiaux*

« Par complexe spatial, nous entendrons toute configuration de points, lignes et surfaces dans l'espace ; les lignes et les surfaces pouvant à volonté être droites ou courbes, ouvertes ou fermées, limitées ou illimitées. On demandera toutefois qu'elles soient d'un seul tenant (1),

(1) « Nur dass alle Elemente unter sich zusammenhängen. »

sans quoi on comptera autant de complexes qu'il y aura de configurations distinctes. Nous prendrons également en considération le complexe ne contenant aucun élément. »

Puis, plus loin :

« Par constituant nous entendrons les trois sortes d'éléments qui viennent d'être nommés, avec en plus l'espace infini (amplex) dans lequel le complexe se trouve plongé, ainsi que les différents espaces qu'il limite. »

Après avoir remarqué qu'il n'est pas pertinent, pour la fin poursuivie, de considérer la ligne comme agrégat de points en nombre infini, et la surface comme agrégat de lignes en nombre infini, Listing introduit, pour chacune de ces quatre catégories de constituants, le nom générique de curie (§ 1).

Puis il passe en revue les constituants des quatre curies :

a) « Les points, qui sont les constituants de la première curie, sont aussi bien les limites d'une ligne que d'une surface ou d'un corps solide. »

La lettre a représente le nombre d'éléments de cette curie (§ 2).

b) Les lignes, ou éléments de la deuxième curie, sont limitées soit par deux points, soit par un seul point, soit encore elles sont illimitées. Ceci précise les relations qui peuvent exister entre les éléments des deux premières curies. On représente par b le nombre d'éléments de la 2e curie (§ 3).

c) « Nous compterons comme constituants de la troisième curie, toutes les surfaces telles que l'on peut aller de chacun des points à tous les autres, sans traverser la frontière... Les frontières d'une surface peuvent être en nombre quelconque, 0 y compris. »

Le nombre de constituants de cette curie est représenté par c (§ 4).

d) « Les corps solides engendrés par les différents complexes forment les constituants à trois dimensions et seront comptés dans la quatrième curie... Par espace nous comprendrons un ensemble de points liés entre eux de façon que l'on puisse aller de l'un d'eux à tous les autres, sans rencontrer la frontière... Les frontières d'un corps solide, formées d'éléments appartenant aux curies inférieures, peuvent être en nombre quelconque, 0 y compris... Le nombre d'espaces est noté par d ; remarquons encore que l'on a toujours $d \geqslant 1$, ce qui singularise cette curie » (§ 5).

Au paragraphe 6, intitulé : « De la frontière », l'auteur introduit une écriture symbolique permettant d'indiquer rapidement le type de frontière dont est muni un complexe. Pour cela, il représente par 1 les éléments de la première curie, par 2 ceux de la deuxième, etc. Il écrit alors des suites ordonnées de nombres, dont le premier indique l'élément limité, et les suivants les éléments limitants. Ainsi par exemple, (2, 0) représente une ligne fermée sans points effectifs ; (4 000) l'espace entier ; (4 301) l'espace intérieur à un cône et (4 321) l'espace intérieur à un polyèdre habituel.

3.3. *Classification des complexes spatiaux*

Au début du paragraphe 7, Listing précise le rôle que joue la topologie dans son étude :

« On peut discerner, parmi les constituants de chaque curie, différentes catégories, qui se distinguent uniquement par des propriétés topologiques, c'est-à-dire par des propriétés qui ne se rapportent ni à la quantité ni à la mesure, mais à l'ordre et à la situation. »

L'étude des complexes dans la perspective de cette définition nécessite des outils nouveaux que Listing décrit dans ce paragraphe. En voici quelques-uns :

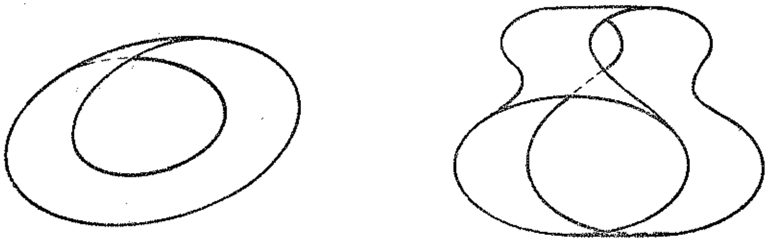
1) *Le diaphragme :* surface décrite par une courbe fermée sans nœuds, lors de la déformation qui la réduit à un point. Cette surface possède deux propriétés principales :

a) Elle est complètement limitée par la courbe qui l'a engendrée ;

b) Si on veut aller de l'un quelconque de ses points à son antipode sans la percer, il faut traverser la frontière.

Listing place en cet endroit une observation dont l'importance pour l'histoire de la topologie est manifeste :

« Il est peut-être utile de profiter de cette occasion pour préciser qu'une surface complètement limitée par une courbe fermée sans nœuds peut posséder des propriétés tout à fait différentes de celles qui viennent d'être citées, comme le montrent, par exemple, les deux figures suivantes. »



a *b*

FIG. 8

La surface représentée sur la figure 8 *a* est le ruban de Möbius. Son histoire sera relatée au chapitre III (§ 1.3).

Le diaphragme conduit encore à la définition suivante : 2 lignes g et g' sont simplement enchaînées, si chacune coupe un diaphragme quelconque de l'autre en un seul point (§ 7 et 8).

2) *Dialyse-état de cyclodicité :* soit K un constituant quelconque, L l'ensemble de ses frontières et M l'espace restant ; K est cyclodique si l'on peut construire deux courbes k et m de sorte que : a) $k \in K$, $m \in M$, et b) k et m soient simplement enchaînées.

Dans la situation contraire, K est acyclodique. Le diaphragme de m, qui coupe K selon la frontière additionnelle L', réalise une dialyse de K. Si le complexe obtenu est encore cyclodique, on recommence la même opération jusqu'à ce que l'on aboutisse à un complexe $K^{(x)}$ acyclodique. K est alors x-fois cyclodique. Bien entendu, le nombre qui vient d'être défini n'a de sens que si « l'on peut établir son indépendance à l'égard du choix et de l'ordre des dialyses successives ».

Une fois cette indépendance vérifiée sur un exemple concret, Listing écrit :

« On peut montrer que x ne dépend que des propriétés topologiques des constituants, et non pas du choix et de l'ordre des dialyses. »

Relevons que la dialyse de Listing ne diffère pas essentiellement des sections transverses de Riemann que nous étudierons au chapitre suivant (voir p. 61).

3) *Diagramme. Tréma :*

« Soit K un constituant et L sa frontière ; faisons subir à L une variation continue, de manière à ce qu'elle pénètre de plus en plus à l'intérieur de K, afin que seul reste de celui-ci un complexe formé de points et de lignes. On déduit ainsi de K un complexe linéaire que l'on peut considérer comme le squelette du complexe donné. Lors d'une telle contraction, les constituants acyclodiques se réduisent en un point, tandis que ceux munis de cycloses conservent ce caractère à travers le diagramme. »

La courbe représentée sur la figure 9 *b* est le diagramme de la surface illustrée dans la figure 9 *a*.

Dans le cas spécial d'un complexe dont la frontière est (300), par exemple une sphère, la transformation nécessaire à l'obtention d'un diagramme n'est pas possible ; cette surface serait elle-même son propre diagramme, et ceci est en contradiction avec le fait qu'un complexe acyclodique a un point pour diagramme. Listing tourne la difficulté en attribuant à toute surface de ce type une frontière « virtuelle » constituée par un point : le tréma. La rétraction peut maintenant se faire à partir de ce point (voir aussi p. 64) (§ 13-§ 15).

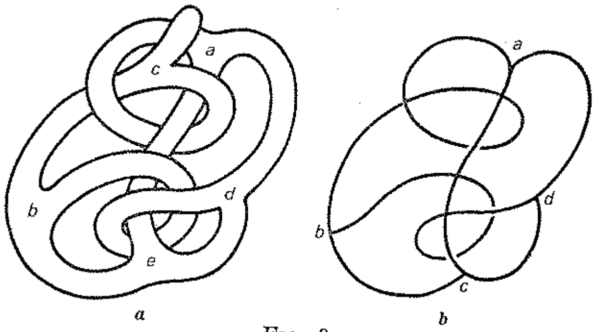


FIG. 9

4) *Anathèse :*

« L'enlacement du bras *ac* par le bras *ab* (voir fig. 10), essentiel dans certaines questions topologiques [1], ne joue aucun rôle dans les recherches concernant le cens. Cette configuration peut alors être demplacée par d'autres configurations plus simples, et qui lui sont équiralentes, pour autant que l'on fasse abstraction des rapports de granveur, de courbure et de position dans l'espace. »

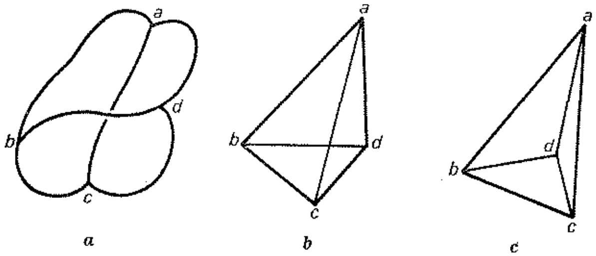


FIG. 10

Listing nomme anathèse le procédé qui rend possible cette transformation.

Ces quelques lignes introduisent, d'une façon assez claire, la distinction, aujourd'hui classique, entre propriétés relatives ou propriétés d'immersion, et propriétés internes (voir aussi p. 123).

[1] LISTING fait allusion à des questions traitées dans ses *Vorstudien*..

3.4. *Théorèmes préliminaires*

Le nombre x défini plus haut joue, pour le cens, un rôle fondamental, comme nous le verrons par la suite. Il s'agit donc d'en examiner la structure afin de déterminer comment on peut l'obtenir, notamment à partir du diagramme ; c'est le but de cette troisième partie, qui contient, en outre, des théorèmes servant de lemmes au théorème fondamental.

Voici d'abord, en résumé, quelques considérations préliminaires présentées par Listing au paragraphe 20 : la projection d'un diagramme sur un plan est formée de différents constituants, savoir :

1) De points, en nombre infini, qui appartiennent à divers types ; on peut distinguer :

a) Ceux qui existent déjà dans le diagramme ;
b) Ceux qui doivent leur présence à la projection, et que Listing nomme traverses ;
c) Ceux qui sont frontière commune à deux lignes ;
d) Ceux qui sont frontière commune à plus de deux lignes et que Listing appelle *ausgang* d'ordre 3, 4..., selon le nombre de lignes s'y croisant.

2) De lignes, que l'on peut répartir comme suit :

a) Celles qui vont d'un *ausgang* à un autre, et qu'il nomme *zug* ;
b) Celles qui joignent deux traverses entre elles, ou un *ausgang* à une traverse et qu'il appelle *strecke*.

3) De *feld*, ou portions du plan déterminées par la projection du diagramme.

Listing énonce alors le théorème suivant : le rang cyclomatique x d'un constituant K donné est égal à $l - k + 1$, où l et k représentent respectivement le nombre de *zug* et d'*ausgang* du diagramme de K.

Pour établir cette proposition, il indique que l'on peut faire subir au diagramme des transformations (« Variation ») qui vont le changer en une complexion plus simple, mais dont l'état de cyclodicité a conservé sa valeur initiale. Il considère à cet effet un *ausgang* N dont il partage l'ordre n en deux nombres t et $u > 1$. Ceci permet de décomposer N en deux *ausgang* T et U, respectivement d'ordre $t + 1$ et $u + 1$. En réitérant cette opération autant de fois que nécessaire, on parvient à transformer un diagramme quelconque en un diagramme dont tous les *ausgang* sont d'ordre 3 (les *ausgang* d'ordre 2 n'interviennent pas lorsque l'on considère seulement la différence entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes). Inversement, deux *ausgang* connexes P et Q, d'ordre p et q, peuvent se transformer, par la suppression du *zug* PQ, en un *ausgang* R d'ordre $p + q - 2$. Au cours de cette transformation, le nombre d'*ausgang* et le nombre de *zug* auront diminué chacun d'une unité. En répétant à volonté cette opération, on parvient à transformer le diagramme en une complexion monocentrique, dans laquelle chaque *zug* est devenu cyclique, c'est-à-dire qu'il a dans l'*ausgang* commun son origine et son extrémité. Si le diagramme avait, dans son état initial, k *ausgang* et l *zug*, il aura visiblement, dans sa forme monocentrique, 1 *ausgang* et $l - k + 1$ *zug*. Il est évident que $l - k + 1$ dialyses suffisent pour le rendre acyclodique, d'où la conclusion annoncée.

Au paragraphe 21, l'auteur détermine le nombre x à partir des *strecke* et des *feld*. Par un raisonnement très élégant, il obtient la proposition :

« Dans une complexion linéaire, portée par un plan ou par une sphère, le nombre de points augmenté du nombre de surfaces surpasse de 2 unités le nombre d'arêtes. »

Remarquons la tournure particulière que Listing donne à cet énoncé : qu'un complexe soit étendu sur un plan ou sur une sphère, le nombre $l - k + f$ est le même. Ce nombre semble donc attaché autant à la surface porteuse qu'à la complexion elle-même.

Dans ce paragraphe Listing montre encore que :

1) $x = m - q - 1$ où m est le nombre de surfaces et q le nombre de traverses ; et

2) $$x = \frac{l - k + m - q}{2}.$$

Les trois paragraphes suivants (23, 24 et 25) sont consacrés à l'examen du caractère cyclodique de chaque curie, dont nous retiendrons ceci :

a) $x^0 = 0$;
b) $x' = 0$ ou 1 selon que la ligne est limitée ou non ;
c) x'' peut prendre toutes les valeurs entières, 0 y compris. Dans le cas où l'on a affecté la surface d'un tréma, on comptera, outre le rang cyclomatique x'', un rang périphractique π de valeur 1 ;
d) x''' peut prendre toutes les valeurs entières, 0 y compris. On obtient ces différents résultats soit par définition, soit par application des relations citées ci-dessus.

Ces mêmes relations permettent d'établir les théorèmes suivants, classés dans l'ordre de généralité croissante :

Théorème 1. — Pour un arbre on a $t = k - l = 1$, t portant le nom de diacrise. Démonstration : ce complexe ne contient pas de cycles et on peut le considérer comme diagramme d'un complexe acyclodique, c'est-à-dire $x = 0$, d'où $l - k + 1 = 0$.

Théorème 2. — Dans un complexe linéaire, dont les constituants acyclodiques sont formés de points et de lignes en nombre quelconque, avec toutefois une seule surface, on a pour la diacrise $t' = k - l = 0$. La démonstration est analogue à celle de la proposition précédente.

Théorème 3. — Dans un complexe dont les constituants, tous acyclodiques, sont formés de points, de lignes et de surfaces en nombre quelconque, avec toutefois un seul espace, l'amplex, on a : $t'' = k - l + m = 1$. Démonstration : les constituants communs à deux ou plusieurs des m parties sont régis par le théorème 1, alors qu'en revanche, chacune des parties est soumise au théorème 2. Finalement, le nombre de constituants du complexe s'obtient en additionnant le nombre de constituants de toutes les parties, et en retranchant les nombres des éléments communs.

Comme le note Listing, les théorèmes de Cauchy et d'Euler sont des cas particuliers du théorème 3.

Théorème 4. — Dans un complexe dont les constituants, tous acyclodiques, sont formés de points, de lignes et de surfaces en nombre quelconque, et de deux espaces (dont l'amplex), on a : $t''' = k - l + m = 2$. On établit le théorème 4 en enlevant une surface au complexe donné (méthode de Cauchy, voir p. 22).

Au paragraphe 32, Listing précise que ses deux démonstrations du théorème d'Euler « n'ont nécessité que des arguments de nature topologique, ce qui n'est pas le cas de bien des démonstrations contemporaines ». Ceci montre combien il avait conscience de travailler dans un domaine nouveau, et quelle indépendance il réclamait pour la topologie, par rapport aux autres disciplines géométriques.

Théorème 5. — Dans un complexe dont tous les constituants sont acyclodiques, le nombre de points a, augmenté du nombre de surfaces c, est égal au nombre de lignes b, augmenté du nombre d'espaces d, c'est-à-dire : $a - b + c - d = 0$.

THÉORÈME 6. — Si p complexes, dont tous les constituants sont acyclodiques, contiennent a points, b lignes, c surfaces et d espaces, on a : $a - b + c - d = p - 1$.

3.5. *Le théorème fondamental*

Listing présente la quatrième partie du mémoire en ces termes :

« Maintenant que nous avons obtenu la relation la plus générale pour le cens des complexes dont tous les constituants sont acyclodiques, il faut étudier l'influence de la cyclose de chaque constituant sur la relation générale, afin de déterminer le cens pour un complexe quelconque. »

La méthode suivante s'impose tout naturellement : on fait subir au complexe les dialyses nécessaires pour rendre ses constituants acyclodiques ; ces opérations augmentent le nombre des différents constituants : a, b, c, d deviennent respectivement $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$, $d + \delta$; le complexe ainsi transformé étant acyclodique, le théorème 5 permet d'écrire :

$$(a + \alpha) - (b + \beta) + (c + \gamma) - (d + \delta) = 0.$$

De plus, les nombres α, β, γ et δ, que Listing nomme attributs, sont de nature topologique ; ils sont donc liés aux ordres cyclomatiques des curies respectives. Le paragraphe 38 établit ces différentes relations, lesquelles nous amènent au premier théorème fondamental :

$$\alpha_r = -x_r^0, \quad \beta_r = -x_r', \quad \gamma_r = -x_r'' + \pi, \quad \delta_r = -x_r'''$$

(l'indice r se rapporte au numéro du constituant considéré), ou aussi [1] :

$$(a - x_0) - (b - x') + (c - x'' + \pi) - (d - x''') = 0 \qquad (1)$$

avec $x^0 = \Sigma x_r^0$, ... La démonstration de cette proposition s'appuie sur un dénombrement direct des constituants introduits par les dialyses.

Au paragraphe 39, Listing démontre une relation analogue pour les complexes formés de p parties distinctes :

$$(a - x^0) - (b - x') + (c - x'' + \pi) - (d - x''') = p - 1 \qquad (2)$$

La très grande variété d'exemples qu'il étudie au paragraphe 40 souligne toute la généralité du résultat obtenu.

Le mémoire se poursuit par une interprétation de la diacrise, qui va conduire le théorème à sa forme finale. Listing commence

(1) « Equation Census ».

par remarquer que, dans les théorèmes préliminaires, la diacrise représente uniquement la partie de l'équation du théorème fondamental, changée de signe, exclue du calcul d'une façon quelque peu artificielle.

Ainsi :

Dans le théorème	1......	$c - d = 0 - 1 = -t$
—	2......	$c - d = 1 - 1 = -t'$
—	3......	$-d = \ -1 = -t''$
—	4......	$-d = \ -2 = -t'''$.

Un raisonnement analogue s'applique au théorème d'Euler et à celui de Cauchy. En effet, les termes 2 et $P + 1$, qui y apparaissent, correspondent aux différents nombres d'espaces non encore comptés parmi les constituants de la quatrième curie.

A la suite de ces considérations, Listing note que :

« L'équation census établit une sorte de bilan entre l'apport des éléments des diverses curies. La diacrise apparaît alors comme un déficit, c'est-à-dire comme la quantité qui rompt l'équilibre entre les différents apports. »

Listing se demande ensuite si le membre de droite de l'équation (2), en l'occurrence $p - 1$, ne pourrait pas être considéré comme une diacrise, de sorte qu'un équilibre équivalent à celui de l'équation (1) soit rendu possible.

« Ces idées, que nous allons poursuivre dans les prochains paragraphes, peuvent apparaître comme un simple jeu ne touchant que la forme du cens. Cependant, la nouvelle formulation du théorème fondamental nous permettra de jeter un regard sur le côté en quelque sorte métaphysique du cens, et de l'appliquer aux complexes dont certains constituants s'étendent à l'infini. »

Listing part d'un complexe formé de p complexes distincts (§ 42) ; il les réunit au moyen de $p - 1$ lignes, de manière à n'avoir qu'un seul complexe. Il tient ces lignes pour des tréma de la quatrième curie ; avant leur apparition, l'espace était périphractique. Dans cette optique, il reste donc à éliminer la périphractie de l'amplex. Pour cela, on introduit une p^e ligne trématique dont l'origine se trouve en un point quelconque du complexe, et dont l'extrémité est à l'infini. Le nombre p du membre de droite de l'équation (2) a ainsi trouvé une interprétation géométrique. Afin de l'indiquer clairement, on pose $\pi'' = p$, et on regarde cette grandeur comme un attribut de la troisième curie. Notre équation prend maintenant la forme :

$$(a - x^0) - (b - x') + (c - x'' + \pi') - (d - x''' + \pi'') = -1.$$

« L'effet des $p-1$ lignes de liaison entre les p complexions a déjà été indiqué au paragraphe 39. Il faut encore établir l'influence de la dernière des lignes trématiques, savoir celle qui rend l'amplex apériphractique... Cette ligne a son origine en un constituant quelconque de l'une des trois premières curies et son extrémité à l'infini. »

Après un raisonnement simple, Listing aboutit à la conclusion :

« Dans tous les cas, le membre de gauche de la dernière expression a subi une diminution d'une unité, et l'extrémité du tréma, qui se trouve à l'infini, doit être comptée dans cette même expression comme unité positive, *ce qui implique que l'infini spatial joue le rôle d'un point* » (1).

Et plus loin :

« Il découle de cette argumentation que nous devons considérer l'espace infini comme un point virtuel, qui exige d'être compté parmi les attributs du cens. »

Assez curieusement, l'auteur voit en ce point un attribut de la quatrième curie. Il le symbolise par la lettre w, susceptible de prendre la valeur 1 ou 0, selon que l'on se donne ou non un espace illimité. L'équation devient :

$$(a-x^0)-(b-x')+(c-x''+\pi')-(d-x'''+\pi''-w)=0.$$

Ce théorème apparaît pour la première fois dans les papiers de Listing à la date du 12 décembre 1859. Sous le titre *Découverte du théorème le plus général*, Listing énonce la proposition précédente, quoique sous une forme légèrement différente. A cet endroit, il ne parle pas encore de cyclose, mais de *Zusammenhangsgrad*, expression qui a son origine dans les travaux de Riemann.

Avant de conclure, signalons un article de Listing intitulé *Ueber einige Anwendungen des Census-Theorems* [*61 c*], où, comme son titre l'indique, il se contente d'appliquer les résultats du *Census* à quelques exemples concrets.

3.6. *Conclusions*

L'œuvre que nous venons d'étudier est remarquable à bien des égards. Son auteur y définit une science, lui donne un nom, en étudie les objets fondamentaux et établit la relation la plus générale qui les lie. Il a en outre une vision nette de l'autonomie de ce nouveau domaine, à tel point qu'on lui voit réclamer pour le théorème d'Euler une démonstration purement topologique.

Cependant, cette œuvre soignée, précise, méticuleuse, manque

(1) C'est nous qui soulignons.

parfois de profondeur ; certains points essentiels ont échappé à son auteur. Il a remarqué que dans quelques complexes les nombres des différents constituants convenablement combinés se font équilibre, et c'est cet équilibre qu'il a cherché à établir pour tous les complexes possibles. Il n'a pas vu — ou n'a pas signalé — que la mesure de ce déséquilibre caractérise les différents complexes du point de vue topologique, et permet d'en obtenir une classification. Listing a ainsi passé de peu à côté du problème fondamental de la topologie. De plus, les critères qu'il définit sont quelquefois difficiles à appliquer. On a peine à comprendre pourquoi il n'a pas tout bonnement utilisé les concepts d'ordre de connexion et de section transverse introduits par Riemann (voir p. 61) et dont il avait connaissance (voir p. 42).

On peut faire grief à Listing de n'avoir pas signalé, par exemple dans le titre, la nature topologique du théorème d'Euler et de sa généralisation, dont nous savons qu'il avait conscience ; on trouve en effet, dans les ébauches du *Census*, différents titres, entre lesquels Listing semble avoir hésité :

a) « Généralisation topologique du théorème d'Euler sur les polyèdres » ;
b) « Le principe de l'attribut. Une généralisation topologique du théorème d'Euler sur les polyèdres » ;
c) « Sur un théorème topologique général de la géométrie » ;
d) « Le principe topologique fondamental de la géométrie. » Ce titre est accompagné de l'équation $\Sigma_0^\varepsilon(-1)^\varepsilon A^{(\varepsilon)}=0$;
e) « Le principe de l'attribut. Une recherche topologique-géométrique » ;
f) « Le principe de l'attribut. Exposé d'un théorème fondamental de topologie et de géométrie » (1).

Sur cette même page, on voit Listing montrer que son théorème n'est pas applicable aux figures 8 *a* et 8 *b* (voir p. 48).

Chacun de ces six titres renferme le mot topologie. Aussi curieux que cela puisse paraître, Listing, qui est pourtant le père de ce mot, préféra intituler son mémoire *Census*...

L'œuvre de Listing, fort connue des mathématiciens du XIXe siècle, n'eut certainement pas l'influence qu'on en pouvait attendre. Ainsi, des quelque trente nouveaux vocables qu'on y rencontre, aucun — topologie mis à part — n'a été consacré par l'usage. Quant au mot topologie, il faut attendre plus de

(1) Listing avait commencé par écrire : « Exposé d'un théorème fondamental de géométrie et de topologie ».

soixante ans (1) pour voir les savants l'utiliser d'une façon systématique (ca. 1920). Seul, peut-être, J. C. Maxwell s'est servi, dans son célèbre ouvrage sur l'électricité et le magnétisme [*65*] (2), de certains résultats tirés des *Vorstudien*... et du *Census*...

Il est temps de terminer ce chapitre ; auparavant relevons encore que Listing est probablement le premier à avoir traité de topologie au cours de séminaires et de conférences, comme l'attestent certains passages de son journal :

a) 20 janvier 1864, « séminaire d'*Analysis situs* » ;
b) 4 novembre 1848 et 2 février 1849, « conférence sur l'*Analysis situs* (chez Bergmann) » ;
c) 27 février 1863, « conférence sur le théorème Census (chez Wiescher) ».

(1) Outre Listing, Eberhard [*27*], Simony [*84*] et Dingeldey [*24*] ont utilisé le mot topologie au cours de la période qui nous occupe.
(2) Voir chap. V, § 2.

Chapitre II

LA TOPOLOGIE AU SERVICE DE L'ANALYSE

L'année 1851 marque un tournant dans le développement de l'*analysis situs*. C'est en effet à cette date que notre science cesse d'être un simple jeu de l'esprit pour devenir, entre les mains de Riemann, un auxiliaire précieux dans l'étude des fonctions analytiques, à laquelle le XIXe siècle mathématique a consacré le meilleur de ses forces. Durège, Neumann et Betti eurent le mérite de transmettre et de développer la pensée du maître, tout au moins au point de vue qui nous intéresse ici. Plus tard, nous verrons Klein et ses élèves reprendre le flambeau et amener l'*analysis situs* au stade où Poincaré devait la trouver au début de ses recherches topologiques.

§ 1. LES TRAVAUX DE B. RIEMANN

1.1. *Généralités*

Bernhard Riemann est né dans le Hanovre, le 17 septembre 1826. A l'âge de 19 ans, il s'inscrit à la Faculté de Philologie et de Théologie de l'Université de Göttingen. Assez rapidement toutefois, il se dirige vers les mathématiques qu'il étudie sous la direction de Gauss, Stern et Goldschmidt. Après un court séjour à Berlin (1847-1849), où Lejeune Dirichlet, Steiner, Jacobi et Eisenstein brillaient de tout l'éclat de leur génie, Riemann regagne Göttingen avec l'intention de préparer sa thèse de doctorat, qu'il soutient en 1851. Dès ce moment vont se succéder une vingtaine de mémoires, constituant l'une des œuvres majeures de la mathématique du XIXe siècle.

Riemann n'a jamais publié d'étude systématique sur la topologie. Ayant besoin de certaines théories ressortissant à cette science, il en a dressé les principaux résultats, démontrant les uns, signalant les autres. Ses contributions les plus importantes se trouvent dans deux grands mémoires, ainsi que dans des manuscrits publiés seulement après sa mort :

1) *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe* (*Dissertation inaugurale*, Göttingen, 1851 [*78 a*] ; ou [*78 c'*], p. 1-60) ;

2) *Théorie des fonctions abéliennes*, 1857 ([*78 b*] ; ou [*78 c'*], p. 89-160) ;

3) *Fragments d'analysis situs* ([*78 c*] ; ou [*78 c'*], p. 414-419).

Outre les paragraphes où Riemann traite explicitement de topologie, celle-ci est utilisée en bien des endroits de l'œuvre, sans que l'auteur ne nous en avertisse.

1.2. *La* Dissertation inaugurale

La *Dissertation inaugurale* de Riemann contient deux idées essentielles à la théorie des fonctions et qui, de plus, conduisent cette science aux portes de la topologie. Une fois le contact établi, ces deux disciplines vont se développer en parfaite symbiose, pour former l'étonnant édifice qu'on peut admirer aujourd'hui.

1.2.1. Alors que jusqu'à Riemann, les fonctions étaient étudiées directement à partir de l'expression analytique liant entre elles les différentes variables, cet illustre géomètre reconnut qu'il était, à bien des égards, plus avantageux de les définir à l'aide d'un petit nombre de principes généraux et simples. Bien que cette idée ne soit pas complètement nouvelle (Gauss, Cauchy), Riemann fut le premier à entrevoir toute son importance [1].

Voyons maintenant comment cette conception mène naturellement vers des notions fondamentales en topologie : soit $f(z)$ une fonction holomorphe [2] sur un domaine A. Riemann recherche les influences que peuvent avoir des hypothèses aussi générales sur le comportement de la fonction f ; en particulier, que peut-on dire de $\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$ (1) lorsque z_0 est un point fixe et z un point mobile quelconque ? Il montre que $\int_c f(z)\, dz = 0$ (2) sur toute courbe fermée c, pourvu que c soit contour total d'une portion de surface ; cela signifie que, moyennant cette hypothèse, l'expression (1) est une fonction bien déterminée de la limite supérieure [1].

(1) A ce propos, on lira [*78 c'*, p. 47].

(2) Un domaine D est un ensemble ouvert connexe. Une fonction est dite holomorphe sur un domaine D du plan, si elle satisfait aux conditions suivantes : a) f est uniforme dans D ; b) f est continue dans D ; c) f admet une dérivée unique en tout point de D.

Que se passe-t-il lorsque c ne remplit pas cette condition ? Dans ce cas, qui en pratique se présente quand la fonction possède une singularité en un point, et que l'on exclut à l'aide d'une courbe fermée, le théorème conserve sa valeur grâce à l'introduction d'une ligne nouvelle (section transverse) qui, partant d'un point de cette courbe, sectionne la surface d'une manière simple (aucun point n'étant traversé plusieurs fois) en rejoignant un point du contour.

On voit ainsi apparaître en théorie des fonctions une classification des surfaces : celles auxquelles la relation (2) est applicable sans modifications, et les autres. Riemann nomme simplement connexes les premières [*78 c'*, p. 9]. Les considérations de l'alinéa précédent suggèrent la possibilité d'une classification plus fine des surfaces, au moyen du nombre de sections transverses qu'il faut pour les rendre simplement connexes. Auparavant, on doit vérifier que ce nombre est attaché spécifiquement à la surface, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du choix des sections. Cette vérification fait l'objet du théorème fondamental, que Riemann énonce et démontre à la page 10 :

« Lorsqu'une surface T est décomposée par n_1 sections transverses q_1 en un système T_1 de m_1 morceaux de surface simplement connexes, et par n_2 sections transverses q_2 en un système T_2 de m_2 morceaux de surface, alors l'on ne peut avoir $n_2 - m_2 > n_1 - m_1$. »

Ceci nous amène à l'important corollaire, seul considéré par les successeurs de Riemann :

« Si le nombre indéterminé de sections transverses est désigné par n, et celui des morceaux par m, le nombre $n - m$ sera constant pour toutes les décompositions d'une surface en morceaux simplement connexes... Ce nombre pourra à bon droit être désigné sous le nom d'*ordre de connexion* d'une surface. Il sera diminué de 1 par l'effet de chaque section transverse, et cela par définition même.

« Il restera invariable par l'effet de toute coupure sectionnant l'intérieur d'une manière simple et partant d'un point intérieur et aboutissant en un point du contour, soit en un point antérieur situé sur le cours même de la section, et il sera augmenté de 1 par l'effet d'une coupure partout simple située à l'intérieur de la surface et ayant deux extrémités » [2] [78 *c'*, p. 11-12].

(1) Ce théorème, attribué généralement à Cauchy (1825), était connu de Gauss depuis fort longtemps, comme en témoigne une lettre de Gauss à Bessel (lettre du 12 janvier 1812 ; voir [*33 a*], p. 156).

(2) En réalité, pour éviter toute ambiguïté dans les termes, il faut ajouter 2 au nombre ainsi défini ; sans cela la sphère, qui est une surface simplement connexe, aurait un ordre de connexion égal à -1.

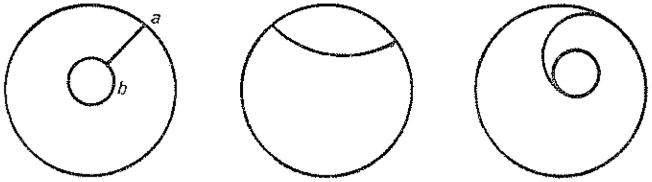
Et plus loin :

« Dans la suite, nous nous en tiendrons surtout aux surfaces formées d'un seul morceau, et pour leur connexion nous nous servirons de la désignation, qui n'a rien d'artificiel, de connexion simple, double, triple, etc., et nous entendrons ainsi par surface n-uplement connexe une surface qui est décomposable en une surface simplement connexe par l'effet de $n-1$ sections transverses. » [*Ibid.*, p. 12.]

Riemann poursuit en indiquant les relations qui existent entre l'ordre de connexion d'une surface et le nombre de lignes qui forment sa frontière :

1) « Le contour d'une surface simplement connexe est nécessairement formé par une ligne fermée » ;
2) « Chaque section transverse diminue ou bien augmente d'une unité le nombre de lignes du contour. »

Pour démontrer cette proposition, l'auteur examine les trois types de sections possibles :



I *II* *III*

FIG. 11

Riemann énonce ensuite le remarquable corollaire :

« Le nombre de lignes fermées dont est formé le contour d'un morceau de surface n-uplement connexe est ou bien égal à n ou bien égal à n diminué d'un nombre pair. » [*Ibid.*, p. 13.]

Arrêtons-nous un instant à ce théorème ; il ne s'applique pas au ruban de Möbius, surface doublement connexe possédant un seul contour. Comment expliquer cette anomalie ? Quelle est la partie de la démonstration qui ne lui convient pas ? En se reportant aux trois sortes de sections transverses, on constate que, dans le cas du ruban de Möbius, le nombre de contours ne diminue ni n'augmente d'une unité.

Nous reparlerons de cette question au chapitre III, § 1.3.

1.2.2. La deuxième idée fondamentale introduite par Riemann en théorie des fonctions est, elle, complètement neuve. Pour

éviter les difficultés propres aux fonctions multiformes, il attache à chacune d'elles une surface, connue aujourd'hui sous le nom de surface de Riemann. Aux propriétés topologiques de la surface de Riemann correspondent pour les fonctions des propriétés intéressantes. Nous verrons au prochain paragraphe comment cette notion mène vers des questions topologiques importantes.

1.3. *Le mémoire de 1857*

Riemann consacre quelques pages de l'avant-propos qui précède l'étude des fonctions abéliennes à l'*analysis situs* [*78 c'*, p. 92-100]. Il commence par des généralités :

« Dans l'étude des fonctions qui proviennent de l'intégration de différentielles totales, quelques théorèmes appartenant à l'*analysis situs* sont presque indispensables. Sous cette désignation employée par Leibniz, quoiqu'en un sens peut-être un peu différent, on peut ranger une partie de l'étude des grandeurs continues où l'on ne considère pas les grandeurs comme existant indépendamment de leur position et comme mesurables les unes par les autres, mais où l'on étudie seulement les rapports de situation des lieux et des régions, en faisant complètement abstraction de tout rapport métrique. » [*Ibid.*, p. 93.]

Puis il énonce, sans démonstration, le lemme suivant, sur lequel reposent toutes les considérations topologiques dont il use dans sa théorie des fonctions abéliennes :

« Lorsque sur une surface F deux systèmes de courbes a et b réunis forment le contour d'encadrement complet d'une partie de cette surface, tout autre système de courbes qui, réuni avec a, forme le contour d'encadrement complet d'une partie de F, forme aussi, lorsqu'il est réuni avec b, le contour d'encadrement d'une partie de surface, qui se compose alors des deux premières parties de surfaces situées le long de a (et cela par addition ou par soustraction, selon que ces deux parties ne sont pas situées du même côté de a ou bien le sont). » [*Ibid.*, p. 94-95.]

Il ajoute :

« Les deux systèmes de courbes jouent le même rôle relativement à l'encadrement complet d'une partie de F, et peuvent se remplacer l'un l'autre dans ce but. »

Cette proposition, que Riemann admet intuitivement, nécessite des restrictions ; nous le verrons au paragraphe réservé aux travaux topologiques de Betti (p. 89 sq.).

Riemann définit ensuite l'ordre de connexion d'une surface :

« Quand sur une surface F l'on peut mener n courbes fermées $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qui, soit qu'on les considère séparément, soit qu'on les considère réunies, ne forment pas un contour d'encadrement complet d'une partie de cette surface, mais qui, jointes à toute autre courbe fermée, forment alors le contour d'encadrement complet d'une partie de la surface, la surface sera dite $(n + 1)$ fois connexe. » [*Ibid.*, p. 95.]

Il faut alors montrer, et c'est le point crucial, que : « Ce caractère de la surface est indépendant du système de courbes $a_1, \ldots, a_n$. »

Riemann procède comme suit :

« ... puisque n autres courbes fermées $b_1, b_2, \ldots, b_n$, qui ne suffisent pas pour former le contour d'encadrement complet d'une partie de la surface, encadreront aussi totalement, si on les réunit avec toute autre courbe, une partie de F.

« En effet, puisque b_1, réunie avec les lignes a, encadre complètement une partie de F, une de ces courbes a peut être remplacée par b_1 et les courbes a restantes. Par conséquent, la réunion de b_1 et de ces $n-1$ courbes a avec toute autre courbe, par exemple b_2, suffira pour former l'encadrement complet d'une partie de F, et une de ces $n-1$ courbes a peut être remplacée par b_1, b_2 et les $n-2$ courbes a restantes. Lorsque, ainsi qu'il est supposé ici, les courbes b ne suffisent pas pour former le contour d'encadrement complet d'une partie de la surface F, ce procédé peut évidemment être continué jusqu'à ce que toutes les courbes a soient remplacées par les b. » [*Ibid.*, p. 95.]

1.4. *Remarques sur les deux définitions de l'ordre de connexion*

1) La deuxième définition que Riemann donne de l'ordre de connexion d'une surface, et qu'il étendra plus tard (voir § 1.5) à des variétés à un nombre quelconque de dimensions, contient en germe la notion de base d'homologie. Nous aurons à reparler de ce concept qui ne prendra toute sa valeur que moyennant des modifications introduites par Poincaré.

2) Cette deuxième définition s'applique telle quelle aux surfaces fermées ; elle évite la très artificielle ponctuation [1].

3) Bien que le concept d'ordre de connexion d'une surface apparaisse déjà dans le mémoire de Lhuilier et dans celui de Hessel, c'est assurément à Riemann qu'il faut en attribuer la paternité. Non seulement ce grand géomètre en a étudié les principales propriétés, mais encore et surtout il l'a caractérisé par un nom, chose importante que Lhuilier n'avait pas su faire. Nous rejoignons ici un aspect magistralement exposé par Poincaré :

« Un mot bien choisi suffit le plus souvent pour faire disparaître les exceptions que comportaient les règles énoncées dans l'ancien langage ; c'est pour cela qu'on a imaginé les quantités négatives, les quantités imaginaires, les points à l'infini, que sais-je encore ? Et les exceptions,

[1] Voir aussi le tréma de Listing, p. 50.

ne l'oublions pas, sont pernicieuses, parce qu'elles cachent les lois.

« Eh bien, c'est l'un des caractères auxquels on reconnaît les faits à grand rendement, ce sont ceux qui permettent ces heureuses innovations de langage. Le fait brut est alors quelquefois sans grand intérêt, on a pu le signaler bien des fois sans avoir rendu grand service à la science ; il ne prend de valeur que le jour où un penseur mieux avisé aperçoit le rapprochement qu'il met en évidence et le symbolise par un mot » [*72 a*, p. 29-30].

4) Dans la perspective du problème fondamental de la topologie des surfaces, savoir la recherche des conditions nécessaires et suffisantes d'homéomorphisme entre deux surfaces, les définitions de l'ordre de connexion données par Riemann ne sont pas totalement satisfaisantes. Car, si ce nombre suffit à caractériser les surfaces fermées, il n'en va plus de même lorsqu'on considère des surfaces munies de r contours. Ainsi par exemple, le tore à deux trous et une surface plane à trois trous, qui ont tous deux 4 comme ordre de connexion, ne sont pas homéomorphes. Dans le cas des surfaces ouvertes, il est plus avantageux de considérer séparément le nombre de contours r et le genre p, nombre maximal de lignes fermées disjointes que l'on peut tracer sur une surface sans la morceler ; nous verrons en effet que ces deux nombres caractérisent parfaitement les surfaces (orientables) du point de vue qui nous intéresse. L'ordre de connexion défini par Riemann est alors égal à $r + 2p$.

5) Pour clore ces considérations sur l'ordre de connexion, nous citerons un remarquable texte de J. Hadamard :

« Malgré tout cela, la théorie des fonctions de Cauchy ne donne pas sur la nature des fonctions algébriques la lumière qu'on devait en attendre et que, par la suite, elle se montra effectivement capable de fournir. Un élément essentiel semble lui échapper, qu'il est nécessaire de considérer dans tous les problèmes importants que l'on a à se poser sur les fonctions et sur les courbes algébriques. Que l'on étudie la géométrie sur une de ces courbes, ou l'expression des coordonnées en fonction de variables auxiliaires, partout un même nombre entier s'introduit, le genre de la courbe ; et la théorie à laquelle nous venons de faire allusion ne permet pas d'en prévoir l'introduction... Non seulement, comme on le voit, Cauchy s'était laissé égarer par l'exemple d'Euler ; mais la lacune qu'il laissait subsister tenait à la même cause qui devait arrêter sous sa plume le développement de la théorie des fonctions algébriques : à tel point que l'on peut se demander si, instruit par une vue plus complète d'une simple question de géométrie élémentaire, il aurait laissé à son continuateur [1] la gloire de jeter les fondements définitifs de cette théorie » [*39 c*, p. 49].

[1] C'est bien entendu de Riemann qu'il s'agit.

Le mémoire de Riemann se poursuit par l'étude des fonctions abéliennes ; et, bien que l'auteur ne parle plus explicitement d'*analysis situs*, elle y tient un grand rôle. Au lieu de classer les courbes algébriques (1) d'après leur degré, Riemann eut l'idée de considérer comme appartenant à la même classe deux fonctions qui peuvent se transformer l'une dans l'autre d'une manière birationnelle (2). Ces transformations conservent la nature analytique profonde des fonctions auxquelles elles sont appliquées, alors qu'en revanche leur nature géométrique subit des modifications, qui peuvent simplifier l'étude des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Ainsi par exemple, on a montré (M. Noether) qu'à toute courbe algébrique plane, il est possible de faire correspondre, par une transformation birationnelle, une autre courbe algébrique plane, n'ayant pour points multiples que des points doubles à tangentes distinctes ; on pourra donc, dans l'étude d'une intégrale abélienne relative à une courbe $f(s, z) = 0$, se limiter au cas où la courbe a comme uniques points singuliers des points doubles à tangentes distinctes. Soit alors f et f' deux courbes appartenant à la même classe, S et S' leurs surfaces de Riemann respectives ; comme f et f' présentent les mêmes caractéristiques de continuité et d'uniformité, S et S' qui les caractérisent complètement à ces deux points de vue, doivent se correspondre biunivoquement. Dès ce moment, la classification des courbes algébriques revient à la classification des surfaces à partir des transformations biunivoques et bicontinues ; aux invariants d'une telle transformation correspondent des invariants pour les transformations birationnelles (le genre p).

L'importance de ces considérations pour l'*analysis situs* apparaît aussitôt. Elles conduisent, naturellement et d'un seul coup, vers trois des conceptions les plus fondamentales pour cette science : étude des transformations topologiques, recherche des invariants topologiques, classification des surfaces selon les principes de l'*analysis situs*.

Précisons que Riemann n'a pas traité ces questions d'une manière aussi explicite, mais qu'elles affleurent en plusieurs points de ce travail. Seuls les sujets indispensables à sa théorie des fonctions abéliennes sont mentionnés, et encore d'une façon

(1) $s = f(z)$ est une fonction algébrique si s et z sont liées entre elles par une équation algébrique $F(s, z) = 0$, de degré r en s et m en z.

(2) $f(s, z)$ et $F(S, Z)$ se correspondent birationnellement s'il existe des fonctions rationnelles g, h, G, H telles que $s = g(S, Z)$, $S = G(s, z)$, $z = h(S, Z)$ et $Z = H(s, z)$.

lapidaire (1). Quant au reste, il s'est probablement proposé de l'étudier plus spécialement dans un mémoire ultérieur, ainsi qu'il le laisse entendre à la page 93 :

« Comme j'ai l'intention, dans une autre occasion, de traiter ce sujet qui fait complètement abstraction des relations métriques, je me contenterai d'exposer sous forme géométrique quelques théorèmes nécessaires pour l'intégration des différentielles totales à deux termes. »

Signalons encore le paragraphe 19 de cette étude, où Riemann montre comment on peut rendre une surface simplement connexe par des couples de sections (deux courbes d'un même couple ayant un seul point commun) effectuées le long de courbes fermées.

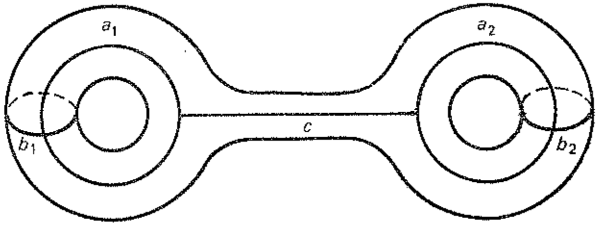


FIG. 12. — On rend la surface simplement connexe en coupant le long de a_1, b_1 ; a_2, b_2 ; c

1.5. *Les* Fragments

On a trouvé dans les papiers de Riemann une ébauche non datée intitulée *Fragment sur l'analysis situs*. Ce court texte a été publié en annexe aux *Œuvres* de Riemann [*78 c'*, p. 414-419]. Lorsque l'on connaît la difficulté qu'il y a à lire ses écrits destinés à la publication, on ne s'étonnera pas d'apprendre que ces fragments sont laconiques, abscons et incomplets. On nous pardonnera donc de ne pas citer *in extenso* ces quelques pages, ni même d'en faire une critique, que l'insuffisance des définitions rendrait d'ailleurs illusoire.

Ces fragments prouvent que Riemann avait absolument pris conscience de ce que les problèmes posés par l'*analysis situs* des

(1) Ainsi par exemple, RIEMANN écrit [*78 c'*, p. 130] : « L'équation $F\binom{n \quad m}{s, \quad z} = 0$ peut donc, à l'aide d'une transformation rationnelle, être transformée en $F\binom{n_1 \quad m_1}{s_1, \quad z_1} = 0$ et *vice versa*. Les domaines des grandeurs (s, z) et (s_1, z_1) ont donc même ordre de connexion, puisqu'à chaque point de l'un correspond un point *unique* de l'autre. »

surfaces sont susceptibles, moyennant des définitions adéquates, d'être généralisés au cas des variétés à n-dimensions (n-Strecke). Ainsi, il écrit :

« Lorsqu'à l'intérieur d'une multiplicité étendue d'une manière continue, chaque variété fermée à n dimensions forme frontière à l'aide de la réunion de m morceaux fixes de variétés à n dimensions, ces morceaux pris séparément ne formant pas frontière, alors cette multiplicité a la connexion $(m + 1)$ dans la n^e dimension » [*78 c'*, p. 415].

Ou plus loin :

« On nomme section transverse d'une multiplicité A fermée, étendue d'une manière continue, chaque multiplicité B à un nombre de dimensions moindre, connexe, comprise à l'intérieur de A, et dont la frontière est tout entière située sur la frontière de A.

« La connexion d'une variété à n dimensions, par l'effet de chaque section transverse simplement connexe qui est elle-même une variété à $(n - m)$ dimensions, sera ou bien diminuée de 1 dans la m^e dimension, ou bien augmentée de 1 dans la $(m - 1)^e$ dimension » [*78 c'*, p. 415].

1.6. *Conclusions*

Les contributions de Riemann à la topologie — transformations topologiques, ordre de connexion, première esquisse d'une classification des surfaces d'après ces transformations, variétés à n-dimensions, invariants topologiques de ces variétés — sont grandes. N'oublions cependant pas que la plupart de ces considérations se trouvent déjà, au moins à l'état embryonnaire, dans les travaux étudiés plus haut. N'oublions pas non plus que l'idée de la topologie comme discipline mathématique indépendante apparaît chez Gauss et Listing, et à un degré moindre chez Euler et Vandermonde.

Quant à l'influence des écrits de Riemann sur l'essor de notre science, elle est immense ; « accueillis comme l'événement le plus considérable de l'analyse de notre temps » [*3*, p. b], les travaux de Riemann se répandent rapidement et entraînent une foule de recherches, dont certaines concernent la topologie, qui devient la servante de l'analyse, un maître connu et estimé. On ne peut rêver plus belle vitrine pour l'*analysis situs*, alors naissante.

A son habitude, Riemann est allé droit au but convoité, sans chercher à s'assurer de tous les ennemis qui se trouvent encore dans la place ; aussi, celui qui veut apprendre « à connaître ces développements a devant lui un chemin raide et pénible... » [*69 a*, p. v]. C'est vraisemblablement ce qui a incité certains de

ses successeurs à commenter et à expliquer ses travaux. Ainsi sont nés les ouvrages de Durège et de Neumann, dans lesquels toute une génération de mathématiciens s'est familiarisée avec la théorie de Riemann et avec les idées topologiques de l'époque.

§ 2. LES COMMENTATEURS

2.1. *Carl Neumann*

« Lorsque l'on veut déterminer l'apport de Neumann à la théorie des fonctions, il faut nécessairement commencer par son cours sur la théorie des fonctions abéliennes... C'est grâce à ce livre que la plupart des mathématiciens purent comprendre la pensée de Riemann dans le domaine de la théorie des fonctions, d'où son énorme intérêt » [*44*].

2.1.1. *L'édition de 1865.* — Publié au début de 1865, ce livre [*69 a*] est tiré d'un cours donné par Neumann en 1863 à l'Université de Halle. Les passages qui nous concernent sont à la sixième leçon (§ 1) et à la huitième leçon (§ 1-§ 4). En voici les idées essentielles : dans la théorie de Riemann, on considère les valeurs d'une fonction comme réparties d'une façon uniforme sur une surface nommée surface de Riemann ; pour étudier ces surfaces, et par voie de conséquence les fonctions qu'elles définissent, dans les meilleures conditions, il est utile de leur donner la forme la plus simple en leur faisant subir certaines transformations. On définit ces transformations en remarquant que, pour conserver les caractères d'uniformité et de continuité de la fonction, il est indispensable, comme nous l'avons d'ailleurs dit plus haut, qu'il existe entre la surface de départ et la surface d'arrivée une correspondance « univoque et continue » (1).

C'est sur le théorème suivant, énoncé par Neumann à la page 209, que repose toute l'importance des transformations continues pour la théorie des fonctions :

« Si les valeurs d'une fonction sont étalées sur une surface quelconque, aucun changement n'intervient en ce qui concerne les points de continuité, les zéros et les pôles, lorsqu'on fait subir à la surface une transformation continue. En chaque point de la surface nouvelle, la fonction se comporte exactement comme au point correspondant de la surface initiale. Les mêmes considérations sont valables pour les caractéristiques de multiformité de la fonction » (2).

(1) C'est là un résumé de la p. 208.
(2) Traduction libre du texte de Neumann.

Dès lors, l'idée de transformation continue s'introduit naturellement dans la théorie des fonctions. Neumann en donne d'abord la définition concrète que voici :

« Par transformation continue d'une surface, on entendra une transformation composée uniquement de flexions et de dilatations, sans déchirure ni réunion » (p. 206).

Il présente, sitôt après, la définition suivante :

« Pour transformer deux surfaces quelconques l'une dans l'autre (pour autant que cela soit possible), il suffit de trouver une loi faisant correspondre à chaque point de la première un point bien déterminé de la seconde, de telle façon qu'à deux points voisins de l'une correspondent deux points voisins de l'autre » (1).

Plus loin il observe que :

« Quelles que soient les flexions et les dilatations qu'il a fallu faire subir à une surface A pour obtenir une surface A', une certaine concordance existe toujours entre les deux surfaces. Ainsi par exemple, une courbe fermée c de A ne se recoupant pas elle-même, se transforme en une courbe fermée c' de A' ne se recoupant pas elle-même, et tout point intérieur à la région limitée par c se transforme en un point situé à l'intérieur de la région limitée par c'. De même, si une section partage A en deux parties complètement séparées, la transformée de cette section partagera A' en deux parties complètement séparées. Finalement, A et A' ont le même nombre de frontières » (p. 206) (2).

Les premières lignes de cette citation nous amènent aux portes des idées maîtresses du fameux *Programme d'Erlangen*, dont nous aurons à reparler (p. 120).

Dans le même paragraphe, Neumann écrit :

« Ainsi, lorsqu'une surface est donnée, on peut toujours en indiquer plusieurs, et fort différentes les unes des autres, qui puissent s'obtenir à partir de la surface initiale par une transformation continue; cependant, on ne peut pas envisager une surface donnée comme la transformée d'une surface quelconque. En effet, pour que deux surfaces puissent être envisagées de cette façon, il faut d'abord qu'elles possèdent le même nombre de courbes frontières. Cela n'est toutefois pas suffisant. Ainsi, la sphère et le tore ont le même nombre de courbes frontières, sans que l'on puisse pour autant passer de l'une à l'autre par une transformation continue, comme on le voit aisément » (p. 207).

(1) Cette définition se rapproche beaucoup de celle donnée peu de temps auparavant par Möbius. Il est loisible de penser que ces deux hommes aient été en relation, Halle étant situé à une trentaine de kilomètres de Leipzig où Möbius enseignait.
(2) Traduction libre du texte de Neumann.

Ces considérations montrent que l'idée de transformation continue conduit à une classification des surfaces. Neumann réserve à cette question les quatre premiers paragraphes de la huitième leçon :

« Nous nous occuperons ici de surfaces quelconques. Nous appellerons surface élémentaire une surface plane à un feuillet, dont la frontière est constituée par une seule courbe fermée, et dont tous les points sont dans le fini. Une surface quelconque sera, d'après sa structure, en relation plus ou moins simple avec la surface élémentaire ; car, suivant sa constitution, des opérations plus ou moins compliquées seront nécessaires pour la ramener à une surface élémentaire » (p. 291).

Après avoir examiné quelques exemples, il conclut :

« Ces exemples nous montrent qu'il est possible de classer toutes les surfaces imaginables, selon les relations qui les lient à la surface élémentaire ; on peut, en effet, les classer à partir des opérations nécessaires pour les ramener à la surface élémentaire. Ces opérations sont constituées de transformations continues et de sections » (p. 292).

Il poursuit en définissant les sections et les rétrosections (1), et en analysant les différents cas qui peuvent se présenter. Puis plus loin :

« Une surface sera dite à connexion simple si elle est transformable en une surface élémentaire par le moyen de transformations continues ; en revanche, si, à part ces transformations, il faut introduire un certain nombre de coupures, la surface sera dite à connexion multiple. »

Neumann établit encore des propriétés relatives aux surfaces ; elles sont basées sur cette constatation :

« Une surface élémentaire est partagée par chaque section transverse, ainsi que par chaque rétrosection, en deux parties complètement distinctes. Si la coupure est une section transverse, respectivement une rétrosection, les deux parties, respectivement l'une au moins, sont des surfaces élémentaires » (p. 294).

Il démontre alors facilement les trois propositions :

1) « Une surface à connexion simple est partagée par une section transverse en deux parties distinctes, dont chacune est simplement connexe » ;

2) « ν sections transverses successives partagent une surface à connexion simple en $\nu + 1$ parties, dont chacune est à son tour à connexion simple » ;

(1) « Une rétrosection est une section fermée, sans point de contact avec la frontière et sans point multiple » (p. 294). En allemand *Rückkehrschnitt*.

3) « Une surface à connexion simple est partagée par toute rétrosection en deux parties distinctes ; l'une d'elles est simplement connexe. »

Au paragraphe 2 de cette huitième leçon, Neumann démontre un cas particulier du théorème fondamental de Riemann, en se servant d'un raisonnement qui s'apparente à celui utilisé par Riemann. Sa conclusion est contenue dans le théorème de la page 298 :

« Si un système quelconque de surfaces, considéré aux divers moments de sa transformation, est partagé, dans chacun de ses états, en un certain nombre de surfaces simplement connexes par différents systèmes de sections transverses, la différence $\nu - \alpha$, entre le nombre de sections transverses et le nombre de surfaces obtenues, est constante ; cette différence est alors une grandeur caractéristique attachée au système de surfaces envisagé. Il en ira donc de même du nombre $\nu - \alpha + 2$, que nous appellerons dorénavant le nombre fondamental du système de surfaces. »

Neumann établit ensuite les deux propositions classiques (voir *supra*, p. 65) :

« Le nombre fondamental d'une surface diminue d'une unité lorsque celle-ci subit une section transverse » et : « Le nombre fondamental ne change pas lorsque la surface subit une rétrosection. »

Ces considérations conduisent à l'importante définition de la page 302, dont voici un extrait :

« Une surface est de connexion n lorsque, outre la transformation continue, $n-1$ sections transverses sont nécessaires pour en faire une surface élémentaire... Le nombre fondamental d'une surface n-fois connexe est égal à n. »

A la page 305, il applique ces résultats :

1) au cas de systèmes de surfaces simplement connexes ; le nombre fondamental est alors $2 - \alpha$;
2) au cas de systèmes de surfaces, dont l'ordre de connexion vaut respectivement $N_1, N_2, \ldots, N_\alpha$; ici, le nombre fondamental est donné par :

$$\sum_{i=1}^{\alpha} N_i - 2\alpha + 2.$$

Au paragraphe 3, Neumann étudie les relations qui existent entre le nombre fondamental d'une surface et le nombre de ses frontières. Cette question avait déjà été traitée par Riemann qui s'était contenté d'en indiquer les principaux résultats. Le seul point nouveau est le suivant : « Une surface fermée est une fois connexe, 3 fois connexe..., ou $2n + 1$ fois connexe. »

2.1.2. *L'édition de 1884.* — En 1884, Neumann donne une édition complètement revue [*69 b*] de l'ouvrage que nous venons d'examiner. Dans la partie nous concernant, il faut relever ceci. L'auteur remarque qu'il est difficile d'énoncer des théorèmes généraux tant que le concept de surface n'est pas défini avec précision, et cela non pas par des propriétés négatives, comme c'était le cas chez Riemann (la surface ne doit pas présenter de « fourche » [1]), mais par des propriétés positives (p. 146). Il pose alors les deux conditions :

1) « La surface doit être telle que le voisinage de chacun de ses points soit un domaine simplement connexe. »
On reconnaît la condition d'homogénéité.

2) « La surface doit être telle qu'il soit toujours possible de trouver un système de sections transverses la rendant simplement connexe » (p. 151) [2]. C'est ce que l'on a appelé par la suite l'axiome de Neumann [*20*, p. 196].

Essayons d'analyser la genèse de ces deux conditions. Les surfaces utilisées en théorie des fonctions doivent être transformables, au moyen d'un nombre fini de sections transverses, en une surface élémentaire ; de plus, il est nécessaire qu'elles ne soient pas de la forme illustrée par les figures suivantes :

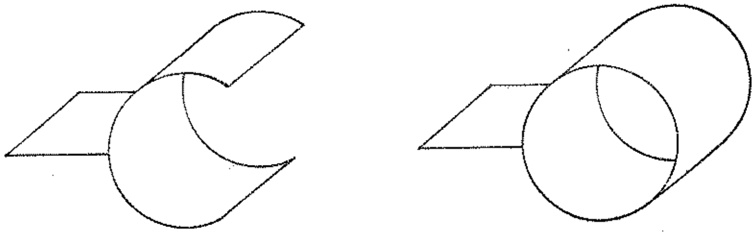


FIG. 13

Il s'agit donc de trouver un critère permettant d'éliminer les surfaces indésirables. La première idée qui vient à l'esprit est naturellement la condition b ; cependant, celle-ci ne suffit pas à exclure les surfaces de la figure de droite. On pallie cet inconvé-

(1) *Spaltung.*
(2) Cette condition se trouve déjà chez **Klein** (voir *infra*, p. 126).

nient par un deuxième critère ; c'est le but de la condition a, qui est fort ingénieuse. Existe-t-il une relation entre ces deux conditions ? L'une d'elles est-elle réductible à l'autre ? D'abord, b n'implique pas a, car a élimine la figure de droite, sans que b ne le fasse. Quant à l'éventualité que a entraîne b, Neumann écrit :

« Il est probable que toute surface vérifiant la première condition vérifie également la seconde »,

mais il s'abstient de conclure. Cette attitude est révélatrice du changement qui s'est fait jour dans le cours de la pensée mathématique, depuis le temps où l'on travaillait avec des séries sans s'inquiéter de leur convergence. A l'appui de ceci, on peut encore citer une remarque de la page 167 :

« Dans ce paragraphe, traitant de surfaces quelconques, nous avons fait confiance à l'intuition géométrique ; *und das dürfte weniger sicher sein* (1) ; il existe en effet des surfaces pour lesquelles les résultats de ce paragraphe sont faux. »

Il le montre à l'aide du ruban de Möbius, sur lequel la présence d'une section transverse ne change pas le nombre de courbes frontières, désaccord flagrant avec une proposition qu'il avait établie plus haut.

Nous conclurons en disant qu'on peut voir en cet ouvrage, écrit avec la « clarté neumannienne », proverbiale auprès des étudiants de Leipzig [*62*, p. 543], le premier manuel de topologie.

2.2. *L'ouvrage de H. Durège (1864 ; 1882)*

Dans son livre [*25*], Heinrich Durège consacre la neuvième section aux questions topologiques ; il reprend l'étude de la classification des surfaces, en clarifiant et en précisant certains points à peine effleurés par Riemann. De la seconde définition de Riemann (voir *supra*, p. 64), il tire le critère :

« Toute courbe fermée de la surface F forme frontière complète, si tous les points de son contour se trouvent d'un seul et même côté de cette courbe fermée. »

Puis, après avoir examiné jusque dans le détail la notion de section transverse, il présente ses principales propriétés qu'il ordonne en une longue suite de propositions s'enchaînant d'une façon fort logique. Au paragraphe 49, Durège étudie le théorème

(1) « Et elle n'est pas si sûre. »

fondamental de Riemann (voir *supra*, 61) ; il rappelle la démonstration de Riemann, éclairant les points obscurs par de nombreux exemples. Plus loin (p. 190), il expose une nouvelle démonstration de cette proposition, que Lippich avait publiée en 1874 [*60*].

2.3. *Diffusion des idées de Riemann*

2.3.1. En Angleterre : dans ce pays, le premier travail consacré aux idées topologiques de Riemann est, à notre connaissance, celui de W. K. Clifford [*18 b*, p. 24] (1877). Il appelle circuit toute courbe fermée tracée sur une surface. Un circuit est dit réducible s'il est possible de le réduire à un point sans quitter la surface, irréducible dans le cas contraire.

« En général, il existe sur une surface un nombre fini de circuits irréducibles indépendants, c'est-à-dire tels qu'ils ne soient ni réducibles, ni réducibles entre eux par un mouvement continu. Tous les autres circuits peuvent alors s'exprimer par l'intermédiaire de ces circuits indépendants... De la même façon, on voit que sur la surface d'un corps à p trous il existe 2 p circuits irréducibles indépendants. »

La *canonical dissection*, que nous avons déjà rencontrée (p. 67), est envisagée ici de telle manière qu' « il ne soit plus possible de construire sur la surface ainsi coupée de circuits irréducibles » (1).

2.3.2. En France : les idées de Riemann et les commentaires profonds de Neumann sont présentés aux savants de langue française dans un livre de J. Hoüel [*45 b*] publié en 1874. Cet ouvrage n'apporte pas d'éléments nouveaux à l'*analysis situs*. Il s'agit vraisemblablement, au moins dans la partie qui nous concerne, d'une traduction du livre de Neumann. On s'en aperçoit lorsqu'on compare les notations utilisées. C'est dans le livre de Hoüel qu'apparaissent les termes connexion simple, connexion multiple [*45 b*, p. 82], déformation continue [*45 b*, p. 239], section transverse [*45 b*, p. 248] et section rentrante [*45 b*, p. 250] (2).

2.3.3. En Italie : c'est d'abord Betti (1859) qui transmet les idées de Riemann dans ce pays, par la traduction qu'il donne [*6 a*] de la *Dissertation inaugurale*. Puis, en 1868, F. Casorati publie un ouvrage dans lequel il passe en revue les différents travaux que la première moitié du XIXe siècle a consacrés à la théorie des fonctions [*15*]. Il montre notamment l'avantage présenté par la méthode de Riemann.

(1) JORDAN avait déjà abordé ce problème en 1866 (voir *infra*, p. 114 sq.).
(2) Qu'on appelle aujourd'hui rétrosection.

§ 3. UN DISCIPLE AVERTI : E. BETTI

3.1. *L'influence de Riemann*

C'est essentiellement sous l'influence de Riemann que Betti écrit son célèbre mémoire de 1871 [*6 b*]. Aussi commencerons-nous ce paragraphe par des considérations sur les relations, fort étroites, qui unissaient les deux hommes.

En 1858, Brioschi, Casorati et Betti accomplissent un périple en Europe, afin de prendre contact avec les diverses écoles qui animaient la mathématique d'alors. Au cours de ce voyage, auquel Volterra attachera une si grande importance (1), Betti se lie d'amitié avec Riemann, son cadet de trois ans. En 1862, ce dernier subit les premières attaques de la maladie qui l'emportera quatre ans plus tard. La Faculté lui conseille l'Italie et la douceur de son climat comme lieu de cure. En novembre 1862, le jeune couple — Riemann avait convolé au début de l'année — débarque en Sicile, où il passe l'hiver. Lors du voyage de retour, qui l'amènera à Göttingen en juin 1863, Riemann, presque rétabli, s'arrête quelques jours à Pise, auprès de Betti. Mais le climat du Nord ne convient décidément pas à notre jeune génie : en août, c'est un nouveau départ vers l'Italie. Les Riemann optent cette fois-ci pour Pise ; ils y habiteront jusqu'en 1865. Durant ce long séjour, Riemann entretient son ami de ses travaux, de ses idées. Il lui parle notamment de la question de l'ordre de connexion des dimensions 1 et 2, dans son rapport avec la théorie des fonctions analytiques (voir § 3.2). Il est hautement probable que Riemann lui signale aussi l'extension de cette notion aux variétés à *n* dimensions. Betti devient le meilleur connaisseur des idées de Riemann, au moins dans le domaine de la théorie des fonctions. C'est ainsi que, lors de la publication des œuvres de Riemann, H. A. Schwarz demande à Betti (lettre du 27 novembre 1875) (2) de « vérifier s'il a bien réussi à reconstituer la pensée de Riemann ».

3.2. *Les deux lettres à Tardy*

Dans deux lettres, adressées à P. Tardy les 6 et 16 octobre 1863 [*6 c*], Betti exprime pour la première fois « sa » théorie

(1) « L'existence de l'Italie comme nation scientifique date de ce voyage » [*92*].

(2) Cette lettre se trouve parmi les papiers de Betti, obligeamment mis à notre disposition par la Bibliothèque de l'École Normale Supérieure de Pise.

de la connexion. Elles révèlent combien grande est l'influence de Riemann sur les travaux topologiques de Betti.

Ces missives contiennent deux définitions de l'ordre de connexion, et, partant, deux façons de le déterminer. De plus, on y trouve l'essentiel des idées qu'il développera dans sa publication de 1871.

Dans la première lettre, Betti commence par écrire :

> « J'ai parlé dernièrement avec Riemann de la connexion des espaces et je m'en suis fait une idée exacte. »

C'est une preuve indiscutable de l'influence de Riemann, dont nous avons parlé ci-dessus.

Il passe ensuite à l'ordre de connexion :

> « Un espace sera dit simplement connexe lorsque chaque surface fermée qu'il contient limite complètement, et à elle seule, une portion d'espace, et si chaque ligne fermée contenue dans cet espace forme à elle seule le contour complet d'une surface entièrement contenue dans cet espace. »

Il s'agit là de l'application aux espaces à trois dimensions d'une notion que Riemann avait déjà introduite pour le cas des espaces à deux dimensions dans le mémoire de 1857 (voir p. 64) et pour les espaces à *n* dimensions dans le *Fragment* (1) (voir p. 68).

Betti poursuit avec l'étude de différents exemples :

a) L'espace intérieur à un ellipsoïde est simplement connexe ;

b) Pour rendre l'espace compris entre deux sphères concentriques simplement connexe, il faut construire une section linéaire allant d'un point de la surface extérieure à un point de la surface intérieure ;

c) L'espace intérieur à un tore « est rendu simplement connexe au moyen d'une section superficielle (2) simplement connexe ». Notons bien la restriction qu'il impose aux sections superficielles : elles doivent être simplement connexes. Sans cette condition, on pourrait construire une infinité de sections superficielles ne rendant pas le tore simplement connexe ;

d) L'espace compris entre deux tores intérieurs l'un à l'autre « est rendu simplement connexe au moyen d'une section linéaire qui va d'un

(1) Il ne nous a pas été possible de déterminer la date à laquelle le *Fragment* a été rédigé.

(2) Une section superficielle est une section effectuée le long d'une surface dont la frontière est entièrement située sur la frontière de la variété considérée.

point de la surface externe à un point de la surface interne, et au moyen d'une section superficielle simplement connexe unissant entre elles la surface interne et la surface externe ».

Ici, Betti commet une légère erreur car il faut deux sections superficielles et une section linéaire. En effet (cf. fig. 14), soit T_1 et T_2 les deux tores. Une section linéaire telle que L_1 est d'abord nécessaire pour que chaque surface fermée forme à elle seule frontière (car un tore T_3 dans lequel T_2 serait entièrement contenu

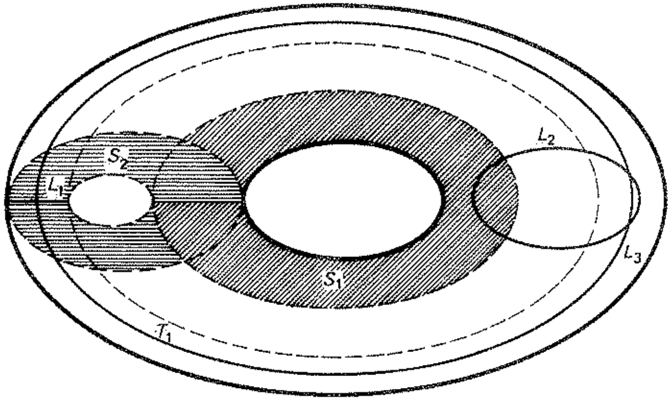


FIG. 14

ne forme pas frontière à lui seul ; grâce à L_1, T_3 est ouvert et n'entre par conséquent plus en question). Ensuite, une ligne telle que L_2 ne forme pas frontière complète ; pour l'éliminer, on construit la coupure superficielle S_1. Il reste à supprimer les lignes du type L_3. On construit pour cela la coupure superficielle S_1.

La lettre de Betti se termine ainsi :

« Les trois espaces que j'ai considérés ont différents ordres de connexion, car l'ordre de connexion dépend du nombre de sections superficielles simplement connexes et du nombre de sections linéaires, par le moyen desquelles ils ont été rendus simplement connexes ; ces nombres conservent leur valeur quelles que soient les sections linéaires choisies (1). L'ordre de connexion sera représenté par deux nombres que je noterai (m, n), lorsqu'il a fallu m sections superficielles et n sections linéaires... La généralisation, pour un nombre quelconque de dimensions, est facile, et l'importance de toute cette théorie pour l'étude des intégrales multiples évidente. »

(1) Voir p. 81 le théorème fondamental.

Passons à la lettre du 16 octobre, dont voici le début :

« Riemann démontre, avec beaucoup de facilité, qu'un espace quelconque peut être rendu simplement connexe au moyen de sections superficielles et de sections linéaires. »

Puis Betti reprend des considérations de la lettre du 6 octobre, en se plaçant à un point de vue légèrement différent :

« On ne change pas les ordres de connexion d'un espace connexe si l'on restreint ou si l'on étire les surfaces qui le limitent, de sorte que ces points se déplacent vers l'intérieur de l'espace, et que celui-ci perde une ou plusieurs dimensions, car ces opérations ont lieu d'une façon continue et sans coupure. Pour qu'un espace soit simplement connexe, il est nécessaire que ce procédé permette de le transformer en un point. »

Betti étudie ensuite les trois exemples de la lettre précédente, à la lumière de cet éclairage nouveau. Prenons, pour fixer les idées, le cas de l'espace compris entre deux sphères concentriques :

« Si l'on restreint la surface externe et si l'on distend la surface interne, de manière à les rendre infiniment voisines, l'espace perd une dimension et se transforme en une surface sphérique, laquelle peut se réduire à un point, lorsqu'on lui fait subir une section ponctuelle. Cette section, qui a une dimension de moins que son image dans l'espace de départ, correspond par conséquent à une section linéaire (1). Donc un espace de ce type est rendu simplement connexe au moyen d'une section linéaire, et son ordre de connexion sera (0, 1). »

Betti termine par deux remarques intéressantes, qui seront développées dans le mémoire de 1871 :

« En généralisant, on voit qu'un espace à n dimensions peut, par dilatation continue et sans déchirure, se réduire à un espace à $n - 1$ dimensions. Au moyen de sections ponctuelles, celui-ci se réduit à un espace à $n - 2$ dimensions, puis à $n - 3$ dimensions et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on aboutisse à un point. Aux premières sections ponctuelles correspondent des sections linéaires, aux deuxièmes des sections superficielles simplement connexes..., aux dernières des sections à $n - 1$ dimensions. Le nombre des sections linéaires est égal au nombre des modules de périodicité d'une intégrale d'ordre $n - 1$; le nombre des sections superficielles simplement connexes est égal au nombre de modules de périodicité d'une intégrale d'ordre $n - 2$..., le nombre de sections à $n - 1$ dimensions est égal au nombre de modules de périodicité d'une intégrale simple. »

Ces lettres sont importantes pour notre histoire, car elles contiennent le squelette de l'article de 1871. Elles montrent que les idées de Betti sur la topologie n'ont guère évolué durant les

(1) On reconnaît ici le diagramme de Listing.

six années qui séparent les discussions avec Riemann du mémoire en question. La grande influence du mathématicien de Göttingen sur Betti apparaît ainsi en pleine lumière : septembre 1863, conversation avec Riemann ; 6 et 16 octobre de la même année, lettres à Tardy ; 1871, parution du travail dans les *Annali*. Le principal mérite de Betti en cette matière est donc d'avoir fait connaître rapidement les importantes découvertes dont Riemann l'avait fait dépositaire.

3.3. *Le mémoire de 1871*

3.3.1. *La notion de variété.* — Dans le mémoire que Betti publie en 1871 [*6 b*], il étudie certaines propriétés des espaces à n dimensions. Il commence par préciser ce qu'il entend sous cette désignation :

« Soient $z_1, \ldots, z_n$, n variables qui prennent toutes les valeurs réelles de moins l'infini à plus l'infini. Nous appellerons espace à n dimensions le champ n fois infini des systèmes de valeurs de ces variables, et nous le noterons S_n. Un système $(z_1^0, \ldots, z_n^0)$ déterminera un point L_0 de cet espace, dont $z_1^0, \ldots, z_n^0$ sont les coordonnées. Un système de m équations déterminera un champ des systèmes des valeurs des $n - m$ variables indépendantes, qui sera un espace à $n - m$ dimensions, contenu dans S_n » [*6 b*, p. 140].

Rappelons qu'une définition semblable avait déjà été donnée par Gauss (voir p. 35). Plus loin Betti écrit :

« Soit $F(z_1, \ldots, z_n) = 0$ (1) l'équation d'un espace S_{n-1} à $n - 1$ dimensions. Si la fonction F est continue et a une seule valeur pour toute valeur réelle des coordonnées, S_{n-1} séparera, en général, S_n en deux régions, l'une pour laquelle $F < 0$, et l'autre pour laquelle $F > 0$. On ne pourra, par variation continue du système de coordonnées, passer d'un point de la première région à un point de la seconde, sans passer par un système de valeurs satisfaisant l'équation (1)... Si, du système des valeurs des coordonnées d'un point quelconque de l'une des régions, on peut passer, par variation continue de ces coordonnées, à tout autre point de la même région, sans passer par des valeurs des coordonnées vérifiant l'équation de S_{n-1}, la région est dite connexe. »

Betti interprète donc analytiquement les concepts d'espace à n dimensions, de frontière et de connexe. Sa définition des « espaces » est cependant trop restrictive. Car toutes les variétés définies de cette façon sont bilatères [voir Poincaré, *72 b*, p. 200]. On obtient la généralité souhaitée en considérant la variété comme définie par un système de n équations

$$x_1 = T_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, x_n = T_n(y_1, \ldots, y_m),$$

où les y sont des variables indépendantes.

3.3.2. *Les nombres de Betti. Le théorème fondamental.* — Le paragraphe 3 du mémoire de Betti comprend deux parties bien distinctes, dont la première est consacrée à l'ordre de connexion. Après avoir rappelé que cette notion fut envisagée par Listing pour les espaces ordinaires et par Riemann pour les surfaces, l'auteur reprend la définition qu'il a donnée dans la lettre du 6 octobre, en l'étendant aux espaces à n dimensions :

« Outre la connexion linéaire, qui seule se présente pour les surfaces, j'ai remarqué que, dans les espaces à plus de 2 dimensions, on pouvait considérer d'autres sortes de connexion. Si, dans un espace R à n dimensions, limité par un ou plusieurs espaces à $n - 1$ dimensions, chaque espace fermé à m dimensions, avec $m < n$, est le contour d'une partie d'un espace connexe à $m + 1$ dimensions entièrement contenue dans R, nous dirons que R a la connexion 1 pour le genre m. Si un espace R a la connexion 1 pour toutes les dimensions, il sera dit simplement connexe. Si, en revanche, on peut imaginer dans R un nombre p_m d'espaces fermés à m dimensions, qui ne peuvent pas former le contour d'une partie connexe d'un espace à $m + 1$ dimensions, entièrement contenue dans R, et tels que tout autre espace à m dimensions forme seul, ou avec une partie, ou encore avec la totalité des p_m espaces, le contour d'une portion connexe d'un espace à $m + 1$ dimensions, entièrement contenue dans R, nous dirons que R a la connexion $p_m + 1$ pour le genre m. »

Betti présente ensuite les quatre exemples de la lettre à Tardy.

Dans la deuxième partie de ce paragraphe, l'auteur démontre, en se servant d'une méthode calquée sur celle que Riemann avait employée en pareille circonstance, le théorème fondamental, dont le contenu indique que les différents ordres de connexion dépendent exclusivement de l'espace considéré, et non des coupures choisies. Tout comme Riemann, Betti entame son raisonnement par le lemme :

« Si un système D, d'espaces fermés à m dimensions, forme, avec un autre système F d'espaces fermés à m dimensions, frontière complète d'un espace S_{m+1} à $m + 1$ dimensions qui soit simplement connexe et entièrement contenu dans R, et si un autre système E, d'espaces fermés à m dimensions, forme avec F frontière complète d'un espace à $m + 1$ dimensions qui soit simplement connexe et entièrement contenu dans R, alors le système D formera avec le système E le contour d'un espace simplement connexe à $m + 1$ dimensions, entièrement contenu dans R. »

Puis Betti énonce le théorème fondamental :

« Si t espaces fermés à m dimensions $A_1, \ldots, A_t$ ne peuvent pas former seuls, mais forment avec tout autre espace fermé à m dimensions, le contour d'un espace connexe à $m + 1$ dimensions entièrement contenu dans R, et si un autre système de t' espaces fermés à m dimensions $B_1, \ldots, B_{t'}$, jouit de la même propriété, alors $t = t'$.

En effet, supposons $t' > t$. Si C est un espace fermé quelconque à m dimensions, le système $(A_1, \ldots, A_t, C)$ formera aussi bien que le système $(A_1, \ldots, A_t, B_1)$ le contour d'un espace simplement connexe à $m + 1$ dimensions, entièrement contenu dans R. Dès lors, le système $(A_2, A_3, \ldots, A_t, C)$ formera aussi bien que le système $(A_2, A_3, \ldots, A_t, B_1)$, avec A_1, contour d'un espace à $m + 1$ dimensions, entièrement contenu dans R. Du lemme précédent on déduit que le système $(B_1, A_2, A_3, \ldots, A_t, C)$ forme le contour d'un espace à $m + 1$ dimensions, entièrement contenu dans R. Le système $(B_1, A_2, A_3, \ldots, A_t)$ forme donc avec un espace quelconque le contour d'un espace à $m + 1$ dimensions. En continuant à remplacer les A par les B on verrait finalement que le système $(B_1, \ldots, B_t)$ forme frontière avec tout autre espace fermé, d'un espace à $m + 1$ dimensions, et que, par conséquent, il forme aussi avec B_{t+1} contour d'un tel espace, entièrement contenu dans R ; ceci est en contradiction avec la supposition $t' > t$. On montrerait de la même manière que $t > t'$ est impossible. Donc $t = t'$. »

3.3.3. *Critique de la démonstration du théorème fondamental.*

1. Le théorème dont nous venons de parler, qui autorise la définition des divers ordres de connexion, est évidemment fondamental. Il importe donc de le placer sur des assises solides. Cela n'est pas le cas ici. En effet, tant Riemann que Betti se sont appuyés sur un lemme tenu pour exact par eux simplement à cause de l'évidence dont il semble revêtu ; or cette proposition n'est vraie, d'une manière générale, que sous certaines conditions. Une fois le lemme convenablement modifié, la démonstration indiquée par ces deux auteurs n'est plus valable. Les critiques que l'on peut avancer à l'encontre du lemme sont en partie dues à A. Tonelli [*90*] ; il fut le premier à remarquer « qu'il n'avait été donné aucune démonstration rigoureuse de cette importante proposition servant de base à la définition de l'ordre de connexion d'un espace multiplement connexe ». Tonelli apporte trois précisions :

1) Tous les espaces qui constituent l'ensemble F sont nécessaires pour former contour aussi bien avec E qu'avec D ;

2) Une partie de D, de E ou de F ne doit pas former frontière à elle seule ;

3) Il est faux de dire que l'espace dont la frontière est formée par les systèmes D et E est connexe. Tonelli donne un exemple dans lequel cet espace contient deux parties disjointes (cf. fig. 15). Ce même exemple montre aussi que l'espace limité par D et E

n'est pas nécessairement égal à la « somme » ou à la « différence » des espaces ayant respectivement D et E, et E et F comme frontière, comme le prétendait Riemann.

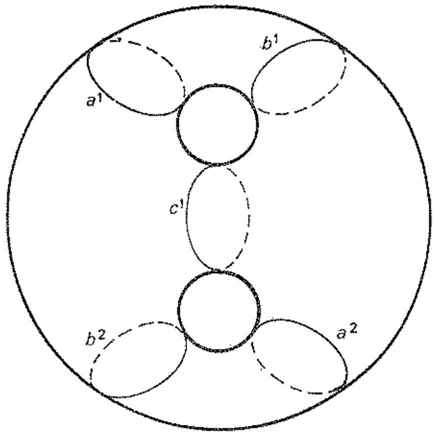


FIG. 15

2. La critique suivante, qui ne figure pas chez Tonelli, enlève à l'argumentation de Riemann-Betti son ressort principal. Voyons plutôt ! On a montré [*71 a*, p. 29] que, pour être correcte, la conclusion du lemme doit s'énoncer : l'ensemble des espaces *non communs* à D et à E forment frontière complète. Examinons maintenant la démonstration en question, à la lumière de cette condition supplémentaire. En premier lieu, on ne peut naturellement pas exiger que tous les éléments de A soient indispensables pour former frontière avec C, sans quoi celui-ci ne serait plus tout à fait quelconque. Soit alors $A_1(A_{i_1})$ un système tel que :

$$A_1(A_{i_1})\, C = RdS_{m+1}$$

et

$$A_1(A_{i_2})B_1 = RdS'_{m+1}.$$

D'après le lemme modifié : $(A_{i_1}) - (A_{i_2})\, B_1\, C = Rd\, S''_{m+1}$ et le raisonnement de Riemann-Betti ne peut pas être poursuivi, sauf toutefois lorsque :

$$A_1(A_{i_1})\,(A_{i_2}) = (A_1, \ldots, A_l) \quad \text{avec} \quad (A_{i_1}) \cap (A_{i_2}) = \varnothing,$$

exigence qui enlève à C l'arbitraire voulu. Ensuite, on a dû admettre que parmi les systèmes formant frontière avec C, respectivement avec B, il se trouvait au moins un élément commun. C n'est alors plus quelconque.

E. Bortolotti [7] émet des critiques à peu près semblables :

« Ou bien les espaces $A_1, \ldots, A_l$ sont vraiment nécessaires pour former contour avec B_1, et alors, comme B_1 est l'un quelconque des éléments de $B_1, \ldots, B_l$, les mêmes éléments seront encore nécessaires pour former contour avec B_2. Du lemme on déduit que B_1 et B_2 forment contour à eux deux, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur le système B. Ou seulement quelques-uns des éléments du système $A_1, \ldots, A_l$ sont nécessaires pour former contour avec B_1 ; appelons alors A_1 un élément non nécessaire. Le système $A_2, A_3, \ldots, A_l, B_1$ forme donc contour à lui seul, et le lemme n'est plus applicable. »

3. Ni Riemann, ni Betti, ni leurs premiers disciples n'ont entrevu le besoin de compter plusieurs fois une même variété, idée qui permettra une algébrisation fructueuse de la notion de frontière. Ce n'est que plus tard que Poincaré envisage cette possibilité. Occupé à répondre à une critique de Heegaard, il remarque que sa définition des nombres de Betti différait de celle donnée par Betti.

Cette histoire, bien que débordant légèrement du cadre de notre étude, mérite d'être contée, au moins à grands traits. Dans un mémoire de 1895 [*72 c*, ou *72 b*, p. 228], Poincaré énonce le théorème suivant :

« Donc $P_p = P_{h-p}$. Par conséquent, pour une variété fermée, les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux. »

Dans sa thèse, Heegaard révèle [*40 b* ou *40 b'*] que ce théorème est inexact. A cela, Poincaré rétorque en 1899 dans son *Complément à l'analysis situs* [*72 d*, ou *72 b*, p. 290 sq.] :

« Avant d'examiner les objections de M. Heegaard, il convient de faire une distinction. Il y a deux manières de définir les nombres de Betti. Considérons une variété V que je supposerai, par exemple, fermée ; soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n variétés à p dimensions, faisant partie de V. Je suppose qu'on ne puisse pas trouver de variétés à $p + 1$ dimensions faisant partie de V, et dont $v_1, \ldots, v_n$ constituent la frontière complète ; mais que, si on leur adjoint une $(n + 1)^e$ variété à p dimensions que j'appellerai v_{n+1} et qui fera partie de V, on puisse trouver une variété à $p + 1$ dimensions, faisant partie de V, dont $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ constitue la frontière complète *et cela de quelque manière que l'on ait choisi la* $(n + 1)^e$ *variété* v_{n+1}. Dans ce cas, on dit que le nombre de Betti est égal à $n + 1$ pour les variétés à p dimensions. C'est la définition adoptée par Betti.

« Mais on peut donner une seconde définition. Supposons que l'on puisse trouver dans V une variété à $p + 1$ dimensions, dont $v_1, v_2, \ldots, v_n$

constituent la frontière complète ; j'exprimerai ce fait par la relation suivante : $v_1 + v_2 + \ldots + v_n \sim 0$, que j'appellerai une homologie.

« Il pourra se faire que, sur la frontière complète de notre variété à $p + 1$ dimensions, une même variété v_1 se retrouve plusieurs fois ; dans ce cas, elle figurera dans le premier membre de l'homologie avec un coefficient, qui devra être un nombre entier. D'après cette définition, on peut additionner les homologies, les soustraire les unes des autres, les multiplier par un nombre entier...

« Cette seconde définition, qui est celle que j'ai adoptée dans l'*Analysis situs*, ne concorde pas avec la première.

« Le théorème énoncé plus haut et critiqué par M. Heegaard est vrai pour les nombres de Betti définis de la seconde manière, et faux pour les nombres de Betti définis de la première manière. »

Et plus loin :

« La démonstration que j'en ai donnée dans l'*Analysis situs* semble s'appliquer également bien aux deux définitions des nombres de Betti ; elle doit donc avoir un point faible, puisque les exemples qui précèdent montrent suffisamment que le théorème n'est vrai que pour la première définition. »

L'étude de ce « point faible » va servir de départ à tout ce mémoire, essentiel pour le développement de la topologie.

4. Il se dégage de ces considérations quelques idées qui présentent un certain intérêt pour l'histoire des mathématiques.

Le lemme, sur lequel Betti appuie son théorème, traduit d'une certaine manière la transitivité de la relation « forme frontière ». On ne raisonne donc plus sur des objets géométriques, mais sur des systèmes d'objets, que le lemme permet de substituer les uns aux autres, selon des règles bien déterminées, comme en algèbre les lois de combinaison des équations permettent de substituer les grandeurs grâce à la transitivité de l'égalité. Cette algébrisation devait devenir effective avec les travaux de Poincaré, qui eut l'idée d'introduire un formalisme adéquat.

« Et l'on ne doit pas sous-estimer l'avantage qu'un formalisme bien adapté apporte aux recherches ultérieures, en ce qu'il devance pour ainsi dire la pensée » [*50 b*, t. I, p. 488].

On reconnaît ici l'un des processus caractéristiques de la pensée géométrique au XIX^e siècle : remplacer l'intuition spatiale par des considérations arithmétiques ou algébriques. Ce processus est l'analogue de celui que l'on rencontre en analyse à la même époque, auquel Klein donna le nom d'arithmétisation des mathématiques [*50 b*, t. 2, p. 232-240], et qui trouva en Weierstrass son principal promoteur. A cette tendance, on peut, outre l'influence de la crise de rigueur amorcée par Cauchy, Abel et Gauss, attribuer une double origine. D'abord, le monde mathématique prend conscience des erreurs énormes que l'intuition peut nous faire commettre, lorsqu'elle n'est pas soumise au contrôle rigoureux de la logique. Il suffit de penser à l'exemple classique des fonctions continues sans dérivées (1), qui arracha à Poincaré l'exclamation : « Comment l'intuition peut-elle nous tromper à ce point ? » ; ou encore à la découverte de Cantor (1877) sur la possibilité d'une correspondance biunivoque entre l'espace numérique linéaire et l'espace numérique à n dimensions, découverte qui fit dire à son auteur : « Je le vois mais je ne le crois pas » (voir p. 118). Ensuite, l'algébrisation complète des concepts géométriques est encore liée au développement de la notion d'espace à n dimensions qui émerge aux environs de 1850 (voir p. 35). Elle est aussi un effet de l'état d'esprit suscité par la pratique de la géométrie analytique.

3.3.4. *Les derniers paragraphes.* — Riemann, on s'en souvient, avait donné deux définitions différentes de l'ordre de connexion, l'une basée sur le nombre de sections transverses, l'autre sur le nombre maximal de courbes fermées ne formant pas frontière. Betti, qui n'a traité jusqu'à présent que de la seconde, introduit (§ 4) la notion de section transverse, tout en indiquant des propriétés s'y rapportant. Après cette préparation, il consacre le paragraphe 5 à démontrer le théorème suivant :

« Pour rendre simplement connexe un espace fini R à n dimensions, au moyen de sections transverses simplement connexes, il est nécessaire et suffisant d'y faire p_{n-1} sections linéaires, p_{n-2} sections à deux dimensions, p_{n-3} à trois dimensions, ..., p_1 à $n-1$ dimensions, si p_1+1, p_2+1, ..., $p_{n-1}+1$ représentent respectivement les ordres de connexion pour les dimensions 1, 2, ..., $n-1$. »

Voici quelques exemples :

a) Ellipsoïde :

$p_1 = 0$, aucune section superficielle
$p_2 = 0$, aucune section linéaire

b) Espace compris entre deux sphères concentriques :

$p_1 = 0$, aucune section superficielle
$p_2 = 1$, une section linéaire

(1) L'histoire de ces fonctions est retracée dans un ouvrage de J. H. Manheim [*64*].

c) Espace intérieur au tore :

$p_1 = 1$, une section superficielle
$p_2 = 0$, aucune section linéaire

d) Espace compris entre deux tores intérieurs l'un à l'autre :

$p_1 = 2$, deux sections superficielles
$p_2 = 1$, une section linéaire.

Dans la dernière partie, Betti interprète p_1 et p_{n-1} comme périodes de certaines intégrales. Riemann avait déjà montré que le nombre p_1 est susceptible d'une telle interprétation. Plus tard, Poincaré a généralisé ce résultat [*72 b*, p. 209-212], montrant que tous les nombres de Betti pouvaient être interprétés de la sorte.

3.4. *Conclusions*

Ce travail de Betti marque une étape importante dans l'histoire de l'*analysis situs*. Pour la première fois, une publication traite de problèmes qui relèvent de la topologie des variétés à n dimensions. Ce mémoire n'a pas passé inaperçu. Il est cité dans les *Œuvres de Riemann* [*78 c'*, p. 419], dans les deux mémoires de Dyck (voir p. 131 sq.), dans l'ouvrage classique de Picard [*71 a*, p. 19] qui utilise la notation de Betti (p pour les différents nombres de Betti, $t = t'$ dans l'énoncé du théorème de Riemann, S pour espace), de même que dans le monumental ouvrage de Poincaré. Bien entendu, les démonstrations, encore très intuitives, manquent souvent de rigueur.

Chapitre III

LA TOPOLOGIE AU SERVICE DE LA GÉOMÉTRIE

§ 1. Möbius, ou la remarquable originalité d'un septuagénaire

1.1. *Généralités*

Commençons par replacer, dans leur contexte historique, les différents textes qui forment la matière de ce paragraphe.

Dans sa séance du 8 février 1858, l'Académie des Sciences de Paris mit au concours, pour son Grand Prix de Mathématiques de 1861, la question suivante :

> Perfectionner, en quelque point important, la théorie géométrique des polyèdres [*96*].

August Ferdinand Möbius, alors âgé de 68 ans, se décide à concourir. D'après Curt Reinhardt, qui a étudié les manuscrits laissés par Möbius,

> « il semble que ce travail ait eu pour but initial l'énumération de tous les polyèdres possibles de *n* sommets, mais que les formidables difficultés de ce problème détournèrent son auteur de la voie primitive, pour l'amener à étudier, plus spécialement, les questions d'aire et de volume de polygones et de polyèdres » [*77*].

Avant la date limite du concours, fixée au 1er juillet 1861, l'Académie reçoit huit mémoires, parmi lesquels celui de Möbius, dont le français très approximatif rendait la compréhension difficile. Ce travail, intitulé *Mémoire sur les polyèdres*, et portant la mention « Tentasse juvat » (1), comprend 100 pages réparties en 62 paragraphes. Il se compose, *grosso modo*, de deux parties.

Dans la première, après avoir étudié avec minutie les notions d'aire d'un polygone et de volume d'un polyèdre, Möbius les généralise aux cas extraordinaires où le périmètre d'un polygone,

(1) Ce qui compte, c'est d'avoir essayé !

ou d'un polyèdre, se recoupe lui-même. Il observe que la relation obtenue pour le calcul du volume d'un polyèdre est valable seulement si ses arêtes vérifient la « loi des arêtes ». L'étude des exceptions dont souffre cette loi l'amène ensuite à la découverte des polyèdres unilatéraux (1), et de leurs principales propriétés.

Dans la deuxième partie, il définit la corrélation élémentaire (on dit aujourd'hui transformation topologique) et établit une classification des surfaces qui s'appuie sur ce nouveau principe.

Ce travail ne fut pas jugé digne du prix, malgré, ou peut-être à cause de la grande nouveauté des résultats qu'il contenait.

Dans le rapport présenté au cours de la séance du 23 décembre 1861 [*97*], le jury du concours déclarait en effet qu'aucun des huit travaux présentés ne répondait pleinement à la question proposée, que le prix n'était pas décerné et que la question était remise au concours pour l'année 1863. Du rapport des commissaires (Liouville, Lamé, Chasles, Bertrand et Serret), nous retiendrons la phrase suivante :

> « D'autres mémoires renferment des théorèmes nouveaux et intéressants, mais la commission n'a pas jugé que les démonstrations fussent suffisantes et elle regrette particulièrement d'avoir à signaler la rédaction très défectueuse de l'un des travaux qu'elle avait surtout remarqué. »

Le mémoire « surtout remarqué » était-il celui de Möbius ? Son français défectueux, son originalité et les ratures nombreuses qui l'affligent nous incitent à le penser. On imagine aisément l'intérêt qu'aurait pour nous la connaissance du jugement exact de la commission. Un nouveau rapport, présenté au cours de la séance du 28 décembre 1863 [*98*], signale qu'aucun nouveau mémoire ne mérite le prix, et que la question est définitivement retirée.

Aussi notre auteur se décida-t-il à publier deux mémoires, recouvrant assez complètement le travail présenté au Grand Prix. Il s'agit de *Théorie de la corrélation élémentaire* (2) et de *Sur la détermination du volume d'un polyèdre* (3), parus respectivement en 1863 et en 1865.

Nous allons maintenant examiner ce travail, en nous référant à la version publiée. Cependant, chaque fois que cela sera utile à la compréhension, nous aurons recours au mémoire original, qui est conservé dans les archives de l'Académie des Sciences de Paris (4).

(1) Terme dont s'est servi Möbius.
(2) [*66 b*] ; ou aussi [*66 a*], t. 2, p. 433-471.
(3) [*66 c*] ; ou aussi [*66 a*], t. 2, p. 473-512.
(4) Nous écrirons G.P. pour Grand Prix.

1.2. *La corrélation élémentaire*

1.2.1. *La corrélation élémentaire comme transformation.* — La notion de corrélation [1] — on dit aujourd'hui la transformation — est l'âme de cet article. Möbius, qui l'a étudiée plusieurs fois au cours de sa carrière, a puissamment contribué à en faire ce principe d'une rare fécondité que l'on rencontre de nos jours dans presque tous les cantons de la mathématique. Aussi Klein a-t-il pu écrire :

« Möbius n'a pas formulé clairement le concept moderne de groupe ; cependant, son idée de corrélation lui est pratiquement équivalente ; à travers cette constatation, on peut dire que Möbius est l'un des précurseurs du Programme d'Erlangen » [*50 c*, note au bas de la p. 118].

Dans la deuxième partie de son fameux *Calcul barycentrique* de 1827 [*66 d* ; ou *66 a*, t. 1, p. 1-388], intitulée : « De la corrélation entre figures, et des classes de problèmes qui en découlent », il introduit une corrélation qu'il nomme « égalité et similitude », et qui correspond à la transformation que les géomètres de notre temps appellent une isométrie. Puis il définit l'affinité (§ 144) et la colinéation (§ 217). C'est finalement 80 pages qu'il consacre, quelques années plus tard, à la *Kreisverwandtschaft* [2] [*66 e* ; ou *66 c*, t. 1, p. 243-314].

Dans notre cas, il s'agit de la corrélation élémentaire. Möbius la définit au paragraphe 1 (voir aussi G.P., p. 64, § 44).

« Deux figures seront dites en corrélation élémentaire, lorsqu'à tout élément infiniment petit de l'une correspond un élément infiniment petit de l'autre, de telle manière qu'à deux éléments qui se touchent [3] dans la première correspondent deux éléments qui se touchent dans la seconde ; ou aussi : deux figures sont en corrélation élémentaire, lorsqu'à tout point de l'une correspond un point de l'autre, de telle manière qu'à deux points infiniment voisins correspondent toujours deux points

(1) C'est la traduction que Möbius donne du mot *Verwandtschaft* dans le mémoire adressé à l'Académie (G.P., p. 64, § 44).

(2) Deux plans sont en *Kreisverwandtschaft* lorsque : 1. Chaque point de l'un a un seul correspondant dans l'autre ; 2. Quatre points qui appartiennent à un cercle de l'un ont leur correspondant situé sur un cercle de l'autre.

Möbius ajoute : « En accord avec le principe de continuité, nous ferons encore l'hypothèse qu'à deux points infiniment voisins de l'un correspondent, au moins en général, deux points infiniment voisins de l'autre » [*66 a*, t. 2, p. 248].

On peut voir dans ce principe de continuité l'ancêtre de la définition d'une transformation topologique que Möbius donne sous la dénomination de corrélation élémentaire (voir p. 90).

(3) *Aneinander grenzenden Elementen.*

infiniment voisins. Dès lors, une ligne ne peut être en c.e. [1] qu'avec une ligne, une surface avec une surface et un corps spatial avec un corps spatial. »

Dans le manuscrit envoyé au Grand Prix (p. 65), il ajoute :

« Si par exemple nous imaginons une surface de sphère parfaitement flexible et élastique, toutes les formes possibles dans lesquelles on peut la mettre par flexion et expansion (sans la déchirer), seront corrélatives entre elles. La surface de chaque polyèdre eulérien est corrélative à une surface de sphère. Au contraire, une surface de sphère et la surface annulaire du paragraphe 41 (tore) ne sont point corrélatives entre elles. Il n'est pas possible de figurer la surface de la terre sur une surface annulaire de manière que 2 à 2 points différents de l'une surface répondent à deux points différents de l'autre *(sic)*. »

Nous avons ici un exemple significatif du mauvais français de Möbius, qui a peut-être découragé le jury du Grand Prix. Relevons aussi que c'est dans ces lignes qu'apparaît pour la première fois la géométrie du caoutchouc, pour qui la surface de chaque polyèdre eulérien est équivalente à la surface d'une sphère.

L'idée centrale de cette théorie est ainsi définie d'une façon claire, au moyen de termes auxquels on peut donner une signification mathématique précise. Cette définition a sur toutes celles ayant cours à cette époque (Euler, Listing, Poinsot, C. Neumann) un avantage décisif : elle n'exige plus qu'il existe une déformation physique transformant une figure en une autre, mais simplement que l'on puisse établir certaines correspondances entre les éléments qui les constituent. On est maintenant en mesure de l'appliquer à des ensembles abstraits, sur lesquels l'intuition n'a plus prise, et qui ne sont par conséquent pas déformables les uns dans les autres. Le champ d'action de notre science s'en trouve considérablement élargi.

1.2.2. *La classification des surfaces.* — La suite de ce travail s'édifie selon le plan suivant :

a) Classification des surfaces planes d'après le critère de la corrélation élémentaire ;

b) Décomposition des surfaces en surfaces que Möbius nomme surfaces primitives ; la nature et l'ordre de succession de celles-ci permettant de faire correspondre à la surface étudiée un schéma qui la caractérise du point de vue topologique. Ces considérations conduisent vers un théorème que l'on peut qualifier de fondamental ;

(1) Abréviation que nous utiliserons dorénavant pour corrélation élémentaire.

c) Etude d'une méthode qui évite les manipulations géométriques indiquées en *b)*.

1. *Considérations préliminaires.* — Après avoir établi que deux lignes ouvertes de longueur finie sont corrélatives, et qu'il en va de même pour deux lignes fermées, Möbius énonce et démontre (§ 5) la proposition suivante, qui joue un rôle considérable dans cette théorie :

« Deux surfaces planes sont corrélatives si et seulement si elles sont limitées par le même nombre de contours. »

Il est frappant d'observer qu'une proposition aussi évidente est démontrée, et non pas simplement admise sans réserve, comme c'était encore souvent le cas dans la mathématique de cette époque. C'est assurément là une manifestation de la crise de rigueur dont a été témoin le XIX^e siècle. Voyons comment Möbius démontre la première partie de ce théorème, lorsque les deux surfaces sont limitées par une seule courbe frontière ; soit φ et φ' les deux surfaces, A un point quelconque de φ, A' son correspondant sur φ', $f_1, f_2, \ldots, f_n$ une infinité de lignes fermées infiniment rapprochées et s'enveloppant les unes les autres, à partir de leur centre commun A et jusqu'à la frontière f de φ ; f est à son tour décomposée en éléments infiniment petits par des points F_1, F_2... En joignant chacun de ces points à A, on a partagé φ en secteurs infiniment petits $F_1 AF_2$... Puis, on décompose de même φ'. On en conclut :

« Lorsque, finalement, on compte dans chaque surface les anneaux et les secteurs d'après l'ordre indiqué, et que l'on associe à l'élément commun au p^e anneau et au q^e secteur de φ, l'élément commun au p^e anneau et au q^e secteur de φ', on remarque, comme l'exige la définition de la corrélation élémentaire, qu'à deux éléments de φ qui se touchent correspondent deux éléments de φ' qui se touchent. »

2. *Le schéma.* — A partir du paragraphe 6, Möbius développe une notion qui lui permet d'explorer avec succès l'ensemble des surfaces : soit une surface fermée φ que, pour simplifier, nous supposerons à courbure continue et ne se recoupant pas elle-même. Considérons un plan ε qui, dans sa position initiale, se trouve complètement au-dessus (au-dessous) de φ, et transportons-le parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il soit entièrement au-dessous (au-dessus) de φ. Lors de ce déplacement, la première rencontre de φ et de ε, ainsi d'ailleurs que la dernière se réduiront à des points, et il pourra y avoir, entre ces deux positions extrêmes, plusieurs contacts de φ et de ε. On construit

à partir de cette situation géométrique le schéma de la surface. L'exemple qui suit (voir fig. 16) illustre le principe de cette construction.

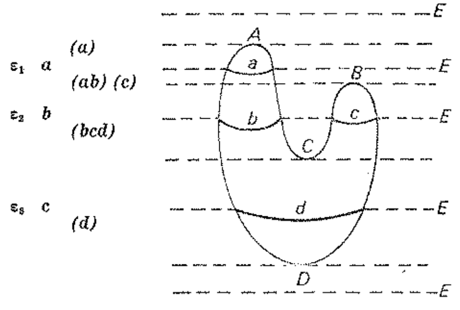


FIG. 16 (1)

ε^1 coupe φ^{II} en a, et en B le contact est elliptique ; ε_2 coupe φ^{II} en b et en c ; en C le contact est hyperbolique ; finalement, ε_3 coupe φ^{II} en d. On obtient plusieurs surfaces, qui ont respectivement pour frontières : (a), (ab) (c), (bcd) et (d). On forme alors le tableau, à trois colonnes, et le schéma de φ^{II} s'écrit :

$$(a) + (ab) + (c) + (bcd) + (d).$$

A titre d'exemple, donnons encore le schéma de la figure 17 :

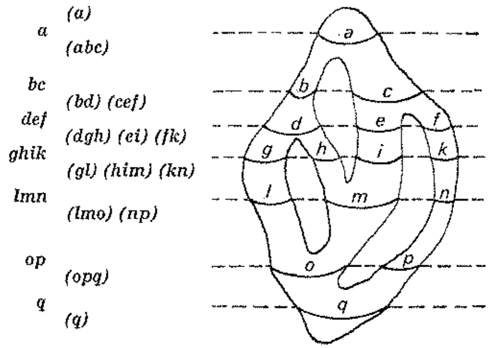


FIG. 17 (2)

(1) [*66 a*], fig. 5, p. 442.
(2) [*66 a*], fig. 5, p. 445.

Le schéma possède quelques propriétés intéressantes, que Möbius examine au paragraphe 8. En voici les principales :

a) Les surfaces déterminées par les positions successives de ε sont limitées par une, par deux ou par trois courbes. Ces surfaces se nomment respectivement union, binion et ternion ;

b) Toutes les courbes de la colonne 2 sont différentes ;

c) En passant d'un élément de cette colonne au suivant, le nombre de courbes varie d'une unité, à condition toutefois que le schéma contienne au moins trois lignes. Cette constatation entraîne la proposition :

« Le nombre de contacts entre une surface fermée à courbure continue et un plan se déplaçant parallèlement à lui-même est un nombre pair. »

d) Comme la surface φ est connexe, on doit pouvoir aller de chacun de ses points à tous les autres, sans quitter φ ; il est donc toujours possible de placer entre deux surfaces disjointes du schéma, une suite d'éléments tels que deux éléments successifs aient toujours une frontière commune. Ainsi par exemple, dans la surface de la figure précédente, on peut placer, entre les deux parties (a) et (fk), les surfaces (abc), (cef). Lorsque cela est impossible, on est en droit d'affirmer que le schéma représente deux ou plusieurs surfaces distinctes ; c'est le cas pour le système représenté par le schéma suivant :

$$\begin{array}{r|l} & (a) \\ a & \\ & (ac)(b) \\ bc & \\ & (c)(bd) \\ d & \\ & (d) \end{array}$$

dans lequel on ne peut passer d'aucune des trois surfaces (a), (ac), (c) à une surface (b), (bd), (d) ; la raison en est que ce schéma représente les deux surfaces fermées

$$(a) + (ac) + (c) \quad \text{et} \quad (b) + (bd) + (d).$$

Plus loin (§ 10), Möbius démontre, en utilisant un raisonnement semblable à celui que nous avons cité à la page 92, l'important théorème :

« Chaque union, binion et ternion peut être mis en c.e. avec une surface plane limitée respectivement par une, deux et trois courbes fermées. »

3. *Les formes primitives.* — Le schéma permet maintenant (§ 11) de définir la notion de forme primitive, essentielle pour la suite :

« Deux surfaces qui sont en c.e. avec une même troisième surface peuvent visiblement être mises en c.e. entre elles. Comme, d'autre part, chaque union est en c.e. avec une surface plane limitée par une courbe fermée, les unions seront également en c.e. entre elles. La même argumentation s'applique aux binions et aux ternions.

« Plus généralement, lorsqu'une surface limitée par une ou plusieurs courbes fermées ne se recoupant pas elles-mêmes est en c.e. avec une surface plane limitée par le même nombre de contours, on l'appellera forme primitive de première, de deuxième, etc., de n^e classe, selon que le nombre de courbes qui en forment la frontière vaut $1, 2, \ldots, n$. Par le même raisonnement que ci-dessus, et en usant des résultats du paragraphe 5, on voit que deux formes primitives de la même classe sont en c.e... »

Dans les lignes qui suivent, Möbius donne un autre modèle pour les surfaces de classe n ; à cette occasion, il présente la projection stéréographique comme transformation topologique :

« Une surface sphérique F munie de n ouvertures est une forme primitive de classe n. En effet, soit a l'une quelconque des n ouvertures, et A un point de F intérieur à a ; projetons alors F à partir de A sur le plan normal au diamètre passant par A. On obtient ainsi sur ce plan $n-1$ courbes fermées enveloppées par la projection de a. La surface F et sa projection sont en c.e. ; il suffit pour le voir de faire correspondre à un point de F sa projection sur le plan. Donc, une forme primitive de classe n peut se définir comme une surface qui est en c.e. avec une sphère percée de n ouvertures. Cette nouvelle définition a l'avantage sur l'ancienne de montrer que les n courbes formant le contour jouent le même rôle, aucune d'entre elles n'enveloppant les autres. »

4. *Réduction des formes primitives.* — L'introduction du schéma (§ 6) est en quelque sorte une tentative d'algébrisation du problème posé par la topologie des surfaces. Poursuivant dans cette voie, Möbius explique (§ 11 et 12) comment certaines manipulations algébriques permettent de simplifier l'expression obtenue :

« Nous savons que (§ 10) toute surface fermée est décomposable, au moyen de plans parallèles, en formes primitives des trois premières classes. Lorsqu'il s'agit simplement de représenter une surface comme somme de formes primitives, en admettant l'utilisation de classes d'un ordre quelconque, deux formes suffisent toujours, comme l'établissent les considérations suivantes.

« Tout d'abord, l'intuition montre que lorsque deux formes planes, munies d'un nombre quelconque de contours, ont une frontière commune, sans toutefois posséder de surface en commun, elles constituent une seule forme dont le contour est la réunion des contours des formes initiales, à l'exception cependant de la frontière commune qui est supprimée. On a ainsi :

$$\begin{aligned}(a) + (ab) &= (b)\\ (ab) + (bc) &= (ac)\\ (a) + (abc) &= (bc)\\ (ab) + (bcd) &= (acd)\\ (abc) + (cde) &= (abde).\end{aligned}$$

Appliquons cette remarque aux deux exemples étudiés plus haut (voir les fig. 16 et 17) :

1) $\varphi^{\mathrm{II}} = (a) + (ab) + (c) + (bcd) + (d)$;
avec $(a) + (ab) = (b)$ et $(c) + (bcd) = (bd)$, il vient :

$$\varphi^{\mathrm{II}} = (b) + (bd) + (d),$$

ou, après la deuxième réduction $(b) + (bd) = (d)$,

$$\varphi^{\mathrm{II}} = (d) + (d) ;$$

2) $\varphi^{\mathrm{V}} = (a) + (abc) + (bd) + (cef) + (dgh) + (ei) + (fk) + (ge) + (him) + (kn) + (lmo) + (np) + (opq) + (q).$

On trouve finalement, en réduisant de proche en proche :

$$\varphi^{\mathrm{V}} = (himop) + (him) + (op).$$

Pour terminer, Möbius fait voir que, moyennant l'introduction de signes auxiliaires, tout schéma peut s'écrire comme somme de deux formes primitives identiques. Ainsi :

$$\varphi^{\mathrm{V}} = (hiln) + (hiln).$$

On débouche alors sur l'importante proposition du paragraphe 15 :

« Il existe toujours un certain nombre de courbes fermées permettant de décomposer une surface close en deux formes primitives, chacune d'elles étant limitée par toutes les lignes en question ; le nombre de lignes indique la classe à laquelle la surface appartient » (1).

Ce théorème justifie la définition suivante : « Une surface close est de classe n lorsqu'elle est décomposable en deux surfaces de classe n. »

D'après ceci, une sphère, ainsi que la surface de la figure 16 (p. 93) sont de classe 1, le tore est de classe 2, la surface représentée à la figure 17 (p. 16) est de classe 4.

(1) Les lignes fermées sont des rétrosections, et la classe est égale au nombre maximal de rétrosections disjointes, ne morcelant pas la surface, augmenté d'une unité.

Möbius continue en indiquant des représentations concrètes de la surface de classe n, représentations aujourd'hui classiques :

1) Considérons deux sphères ne se coupant pas, chacune munie de n ouvertures, et relions-les deux à deux par des tuyaux sans points communs. La surface ainsi construite est de classe n. En effet, si l'on coupe chaque tuyau le long d'une courbe fermée, la surface est divisée en deux sphères munies de n trous, qui sont précisément des formes primitives de classe n.

2) Considérons encore une surface plane percée de $n - 1$ trous et faisons-la coïncider avec une surface analogue, en imaginant que lorsque les n lignes de l'une se superposent aux n lignes de l'autre, l'une des surfaces se dilate vers le haut, l'autre vers le bas. La surface obtenue est de classe n. On parvient au même résultat en perçant une surface de classe 1 de $n - 1$ canaux n'ayant aucun point commun.

Au paragraphe 16, Möbius retrouve, comme conséquence de sa théorie, l'expression qui avait servi à Riemann de définition pour l'ordre de connexion :

« Une surface close de classe n est, d'après le paragraphe précédent, une surface qui peut être divisée en deux formes primitives par n lignes fermées $a, b, \ldots, n$. » ;

il en déduit, par un raisonnement simple, que :

« Sur une surface close de classe n, on peut construire $n - 1$ courbes fermées ne la partageant pas. »

Cette constatation nous amène à nous demander si Möbius a eu connaissance des succès obtenus par Riemann en cette matière. L'absence de documents ne nous autorise pas à répondre d'une façon catégorique, mais deux raisons nous incitent à penser que ce n'était pas le cas. En premier lieu, il paraît quasi évident que, retrouvant par des voies fort différentes des résultats que Riemann avait publiés plusieurs années auparavant, il n'aurait pas manqué de le signaler, au moins dans le mémoire présenté à l'Académie. Ensuite, Möbius n'était pas un mathématicien universel. Il a travaillé, outre la statique et la mécanique céleste, presque exclusivement dans le domaine de la géométrie pure. Il est donc probable qu'il ignorait les détails des travaux de Riemann, récents et difficiles.

5. *Le théorème fondamental.* — Le paragraphe 17 est consacré à un théorème que l'on peut qualifier de fondamental, car il résout complètement le principal problème de la topologie des

surfaces closes unilatérales, savoir la détermination des conditions nécessaires et suffisantes d'homéomorphisme. On parvient à ce théorème en réunissant les deux propositions suivantes :

1) « Si deux surfaces φ et φ' appartiennent à la même classe, on peut les mettre en c.e. En effet, d'après le paragraphe 5, n lignes fermées suffisent à partager tant φ que φ' en deux formes primitives, disons χ et ψ respectivement χ' et ψ'. Ces quatre formes sont, suivant les résultats du paragraphe 11 (1), en c.e., de telle sorte qu'à chacune des n frontières communes à χ et à ψ correspond une frontière commune à χ' et à ψ'. Il apparaît dès lors que l'ensemble obtenu par la réunion de χ et de ψ est en c.e. avec la réunion de χ' et de ψ'.

2) « En revanche, deux surfaces appartenant à des classes différentes ne sont jamais en c.e. En effet, considérons pour commencer deux surfaces φ et φ' qui appartiennent respectivement à la première et à la deuxième classe ; construisons ensuite sur φ' une courbe fermée a' ne la partageant pas, ce qui est toujours possible par hypothèse, et raisonnons par l'absurde en supposant que φ et φ' soient en c.e. La courbe a' devrait alors avoir son correspondant a sur φ. Soit deux points P et Q de φ, situés respectivement dans les deux régions déterminées par a sur φ, r une ligne joignant P et Q, et R l'intersection de celle-ci et de a ; finalement P', Q', r' et R' leur correspondant ; R' devrait se trouver sur a', puisque R est sur a, et sur r', qui n'a aucun point commun avec a' ; c'est évidemment impossible. φ et φ' ne peuvent pas être en c.e. »

Raisonnant de même, l'auteur démontre le théorème dans le cas général. La réunion de ces deux propositions s'énonce :

« Deux surfaces appartiennent à la même classe si et seulement si on peut les mettre en c.e. »

Ce paragraphe s'achève sur une remarque intéressante, déjà formulée, quoique sous une forme différente, par Riemann et Listing :

« Il serait logique de penser que parmi l'infinité de manières de partager une surface en formes primitives, certaines puissent exiger n lignes, d'autres n'. Cela ne saurait toutefois être car, comme démontré ci-dessus, une surface appartient à une seule classe. »

6. *Une méthode algébrique.* — Le but de cette dernière partie est annoncé par Möbius au paragraphe 18 :

« On a montré (§ 13 et 14) comment, à partir d'un nombre quelconque de formes primitives des trois premières classes représentant une surface donnée, on déduit une expression constituée de deux formes primitives

(1) Voir p. 95.

seulement, déterminant ainsi la classe à laquelle appartient cette surface. Celle-ci peut aussi se calculer directement d'après le nombre de formes primitives de première et de troisième classe, c'est-à-dire sans qu'il soit nécessaire d'effectuer, dans chaque cas particulier, les réductions indiquées plus haut. En effet, soit une surface décomposée en u formes primitives de première classe, en s de deuxième, et en t de troisième ; le nombre total de lignes est alors égal à $u + 2s + 3t$, et comme chacune d'elles est contenue deux fois dans une telle décomposition, on obtient, pour le nombre de lignes distinctes, $\frac{1}{2}(u + 2s + 3t)$, d'où on tire que u et t sont soit les deux pairs, soit les deux impairs. »

Après avoir examiné les réductions introduites aux paragraphes 13 et 14, l'auteur arrive à la conclusion :

« Au cours de ces deux sortes de réductions, tant le nombre de termes qui constituent la décomposition de la surface en formes primitives que le nombre de lignes distinctes ont diminué d'une unité. Après r réductions on aura :

Nombre de termes $= u + s + t - r$;
Nombre de lignes $= \frac{1}{2}(u + 2s + 3t) - r$; avant et après chaque réduction :
Nombre de lignes — Nombre de termes $= \frac{1}{2}(t - u)$. »

Möbius montre ensuite (§ 19) que u et t peuvent aussi se caractériser à partir d'éléments de la géométrie différentielle, u étant égal au nombre de points de la surface dont le contact avec un plan ε_0, se déplaçant parallèlement à lui-même, est elliptique, t au nombre de points dont le contact est hyperbolique. Cela revient à dire qu'il existe une relation entre la classe d'une surface et la nature différentielle de certains de ses points. Une fois le nombre de termes réduit à 2, le nombre de lignes diminué de 2 unités est égal à $\frac{1}{2}(t - u)$, et, comme le nombre de lignes a la même valeur que le nombre n qui indique la classe de la surface (§ 15), on a :

$$n = \frac{1}{2}(t - u) + 2 \tag{1}$$

Cette façon d'envisager le nombre n suggère une dépendance entre la géométrie différentielle et la topologie d'une surface. Ce point de vue sera précisé par Dyck (p. 151) et Boy [*9*], puis généralisé par Hopf (1).

7. *Le théorème d'Euler.* — Möbius se sert encore des développements de ce mémoire pour fixer l'influence de la classe d'un

(1) Heinz Hopf, Die Curvatura integra Clifford-Kleinscher Raumformen, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, Göttingen, 1925, p. 131-141.

polyèdre sur l'énoncé du théorème d'Euler. La méthode utilisée est différente de celle qu'il avait exposée dans le travail présenté à l'Académie. Il montre d'abord (§ 20) que tous ces raisonnements restent valables

« si au lieu de plans parallèles $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$, on use d'une suite de surfaces sphériques $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$ telles que la surface à étudier soit entièrement située entre σ_0 et σ_n, ou plus généralement encore, lorsque l'on remplace la surface sphérique par une surface quelconque appartenant à la première classe ».

Il peut alors écrire (§ 22) :

« Supposons que les sommets et les arêtes du polyèdre soient émoussés d'une façon infiniment légère, de sorte que sa surface π se transforme en une surface régie par les lois de la continuité ; considérons ensuite une surface τ de première classe qui enveloppe π, et rapetissons-la de manière qu'elle rencontre une fois chacun des sommets, des arêtes et des faces. Parmi les contacts qui apparaissent, ceux ayant lieu avec les sommets et les faces sont visiblement de nature elliptique ; quant aux contacts avec les arêtes ils sont de nature hyperbolique. Si nous appelons E, F et K respectivement le nombre de sommets, de faces et d'arêtes du polyèdre, u et t vaudront $E + F$ et K ; la relation (1) nous donne :

$$n = \tfrac{1}{2}(t - u) + 2 = \tfrac{1}{2}(K - E + F) + 2,$$

ou aussi :

$$E + F = K - 2(n - 2),$$

équation qu'avait déjà obtenue Lhuilier. »

Ce mémoire se termine par des considérations sur la topologie des corps de l'espace, dont voici les résultats essentiels : « Deux corps de l'espace, limités par des surfaces de première classe, sont toujours en c.e. » (§ 21). Cette proposition est fausse, car, comme l'a montré J. W. Alexander [*2*], il existe un exemple de surface simplement connexe, limitant un espace qui n'est pas simplement connexe. Puis (§ 23) :

« Deux corps, chacun limité par une surface de première classe et par une surface de deuxième classe, peuvent toujours être mis en c.e., peu importe d'ailleurs que les surfaces extérieures, et par conséquent aussi les surfaces intérieures, appartiennent à la même classe ou non. »

1.3. *La détermination du volume d'un polyèdre, ou la genèse de la notion de la surface à un côté*

Dans cette œuvre, la dernière qu'il compose (1865), Möbius expose et analyse, entre autres, la notion de polyèdre à un côté. Il aura ainsi abordé et résolu les principaux problèmes

de la topologie des surfaces. Notre propos, dans ce paragraphe, est de retracer le chemin qui le conduisit vers cette importante découverte.

Les premiers éléments se trouvent dans le *Calcul barycentrique* [*66 a*, t. 1]. Rompant (1) avec certaines habitudes de la géométrie des Anciens, dans laquelle la longueur d'un segment, l'aire d'une surface et le volume d'un corps étaient des grandeurs absolues, Möbius écrit [*66 a*, t. 1, p. 25] :

« Les deux lettres qui représentent ordinairement une portion de droite, l'une indiquant son origine et l'autre son extrémité, ne seront pas utilisées ici pour signifier sa valeur absolue, mais afin de préciser, suivant l'ordre des lettres, si cette valeur doit être comptée comme positive ou comme négative.

« Ces conditions permettent d'écrire, si A et B sont les extrémités d'un segment : $AB + BA = 0$; de même, si C est un point situé entre A et B, $BC + CA + AB = 0$. »

Puis (§ 17) :

« Un point mobile peut toujours parcourir le périmètre d'un triangle dans deux sens... Si le triangle est alors représenté, comme à l'accoutumée par ses trois sommets, l'ordre dans lequel ils sont écrits indiquera le signe de l'aire du triangle, relativement à un sens défini d'avance.

« Si A, B, C représentent les trois sommets d'un triangle, les expressions ABC, BCA, CAB symboliseront l'aire de cette surface affectée d'un certain signe et CBA, BAC, ACB la même aire affectée du signe contraire. Soit alors BCD trois points en ligne droite, et A un point quelconque ; on pourra écrire, en vertu de ce qui précède :

$$ACD + ADB + ABC = 0 \text{ »} \quad (\S\,18).$$

Au paragraphe 19, Möbius étend cette façon de voir au volume d'un polyèdre :

« Soit la pyramide $BCAD$; pour pouvoir attribuer un signe à son volume, nous utiliserons la méthode suivante : considérons le triangle CAD comme surface de base et supposons que son aire soit positive ; le volume déterminé par $BCAD$ sera alors tenu pour positif (négatif dans le cas contraire). Ainsi, on obtient la double liste :

$ABCD$	$ABDC$
$ACDB$	$ACBD$
$ADBC$	$ADCB$
$BADC$	$BACD$
$BCAD$	$BCDA$
...	... »

(1) Möbius avait été précédé dans cette voie par A. L. Meister (voir *infra*, p. 102) ainsi que par G. Monge (voir R. Taton, *L'œuvre scientifique de Monge*, Paris, Presses Universitaires de France, 1951, p. 246-249).

L'exemple 2 du paragraphe 165 (p. 198) renferme des idées essentielles pour le mémoire de 1865 :

« Soit 5 points quelconques $ABCDE$ situés dans un même plan, et reliés 2 à 2 par des lignes droites ; déterminer l'aire du pentagone $ABCDE = x$, à partir de l'aire des triangles $EAB = a$, $ABC = b$, $BCD = c$, $CDE = d$, $DEA = e$. »

Möbius montre que le nombre x doit satisfaire à la condition :

$$x^2 - (a + b + c + d + e)x + ab + bc + cd + de + ea = 0 \quad (2);$$

on obtient donc deux aires différentes pour le polygone $ABCDE$. Il indique ensuite comment on peut construire simplement $ABCDE$ d'après l'aire des 5 triangles cités. Ceci l'amène à observer que cette construction ne donne pas toujours un polygone ordinaire ; elle engendre aussi parfois un polygone dont le périmètre se recoupe plusieurs fois lui-même. Qu'est-ce alors que l'aire d'une telle figure ? Les raisonnements précédents font voir que la construction est en accord avec la relation (2), lorsque l'on définit l'aire du pentagone comme la somme $DEA + DAB + DBC$ ou $EAB + EBC + ECD$; cependant, tandis que l'égalité de ces deux sommes est évidente pour les polygones ordinaires, elle nécessite une étude plus approfondie quand le polygone n'est pas ordinaire. Möbius établit que l'expression :

$$\Sigma = PAB + PBC + PCD + PDE + PEA \quad (3)$$

ne dépend pas du choix du point P dans le plan des 5 points $ABCDE$, résultat encore valable lorsque P est confondu avec l'un d'eux. Dès lors, toutes les sommes de la forme (3) ont une même valeur, égale à l'aire du polygone, lorsqu'il est ordinaire. Il est donc légitime de recourir à cette somme pour définir l'aire d'un polygone, ordinaire ou non.

Venons-en au mémoire qui fait l'objet de ce paragraphe. Il débute par une courte introduction, dont voici l'essentiel :

« Il y a presque cent ans, dans un article intitulé « Generalia de genesis figurarum planarum et inde pendentibus earum affectionibus » (*Novi commentarii societatis reg. scient. Gotting.*, t. 1 ad annos 1769-1770), A. L. F. Meister étudiait l'aire des polygones plans dans toute sa généralité. Il y considérait également ceux dont le périmètre se recoupe lui-même une ou plusieurs fois (polygones non ordinaires). Une telle généralité n'a pas encore été atteinte dans l'étude du volume d'un polyèdre. En effet, si une étude de ce genre avait été faite, on aurait sans doute été amené à considérer des polyèdres dont le volume n'est pas déterminable, ce qui ne fut pas le cas jusqu'ici. C'est la raison pour laquelle je tenterai, après avoir donné du polyèdre une définition aussi

générale que possible, de déterminer sous quelles conditions le volume en est défini, et ensuite quelles sont les relations qui permettent de le calculer. »

C'est peut-être par l'intermédiaire de Gauss que Möbius eut connaissance du travail de Meister. Dans une lettre à Olbers du 30 octobre 1825 [*33 d*, p. 398], Gauss parle du mémoire de Meister et de l'idée d'aire négative ; on y trouve aussi les figures suivantes, qui sont quasiment celles dont Möbius se sert (voir fig. 18) :

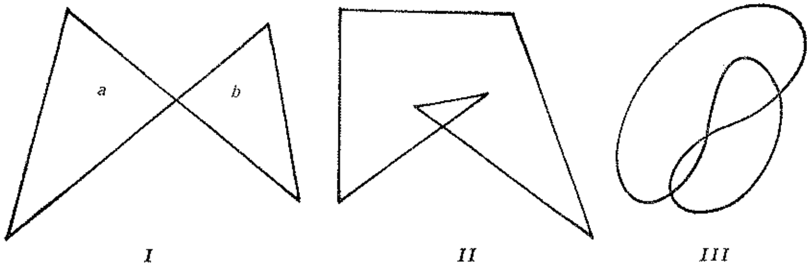


Fig. 18

Voyons les définitions annoncées (§ 1) :

« Un polygone plan peut être défini comme un système de lignes droites limitées, contenues dans un même plan, et unies entre elles de façon que chaque extrémité d'une droite soit confondue avec l'extrémité d'une seule autre droite du système. Ces lignes porteront le nom d'arêtes, *au lieu de la dénomination habituelle de côté, à laquelle on attribuera par la suite un autre sens* (¹). De la même manière, un polyèdre sera défini comme un système de polygones de l'espace, unis entre eux de telle sorte que chaque arête appartienne à deux, et à deux surfaces seulement. »

Afin d'exclure les polyèdres limités par plusieurs périmètres et ceux contenant des cavités, Möbius ajoute la condition :

« Un point mobile sur la surface d'un polygone et ne pouvant passer sur la surface voisine qu'en traversant l'arête commune, peut aller de l'une quelconque des surfaces à toutes les autres. »

L'intérêt de ces définitions est double. D'abord, c'est probablement la première fois dans l'histoire que ces concepts, qui appartiennent depuis la nuit des temps au langage du mathématicien, sont définis d'une manière aussi précise ; c'est là un nouvel exemple du besoin profond de définitions rigoureuses,

(¹) C'est nous qui soulignons.

que nous avons considéré, en d'autres occasions, comme l'une des caractéristiques de la pensée mathématique dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle. Ensuite, ces définitions ont été engendrées par des exigences pratiques ; elles sont donc à la fois naturelles et constructives, à la différence de bien de leurs homologues du début du siècle.

Il nous faut maintenant montrer comment la recherche de l'aire et du volume amena Möbius à l'importante découverte que nous savons. Aux paragraphes 14 et 15, il reprend, se plaçant dans une perspective légèrement différente, des considérations déjà explicitées dans le *Calcul barycentrique*, et que nous avons signalées aux pages 101 et 102. Ainsi, il décompose un polygone $ABC, \ldots, MN$ en triangles à partir d'un point O quelconque, et il montre que :

$$\Sigma = OAB + OBC + \ldots + OMN + ONA$$

est indépendante du choix de O (théorème 1) et que, dans le cas d'un polygone ordinaire, cette somme exprime bien l'aire. Appliquée aux polygones non ordinaires, cette définition implique que lorsqu'un même élément apparaît dans p triangles avec

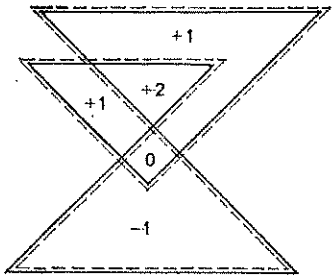


FIG. 19 (1)

le signe $+$, et dans q triangles avec le signe $-$, il apparaît $p - q$ fois dans la somme finale. On est conduit à attacher à chaque surface un certain coefficient, qui n'est autre que le nombre de tours. A propos de ce nombre, Möbius démontre une proposition que l'on peut énoncer comme suit : lorsque deux surfaces ont une ligne en commun, le coefficient défini ci-dessus a sur la rive intérieure une valeur qui surpasse d'une unité sa valeur sur l'autre rive (voir la fig. 19).

(1) [*66 a*], t. 2, p. 481.

Raisonnant par analogie, il étend ces considérations à la recherche du volume déterminé par un polyèdre. Si $ABCD\ldots$ est un polyèdre quelconque, on choisit un point P dans son intérieur, et on considère l'expression

$$(P) = Pa + Pb + Pc + \ldots \qquad (4),$$

dans laquelle Pa indique le volume d'une pyramide de sommet P et ayant pour base un polygone représenté par a. Comme précédemment, cette définition se généralise aux cas des polyèdres non ordinaires, à condition toutefois de montrer que la somme (4) est indépendante du choix de P. La démonstration fait l'objet des paragraphes 20 et 21. Elle s'appuie sur le lemme suivant :

« La différence de volume entre deux pyramides de sommet P et P' construites sur la même base est égale au volume de l'espace engendré par le triangle $PP'X$ lorsque le point X parcourt le périmètre du polygone de base. »

L'idée de la démonstration est alors la suivante :

Soit $(P') = P'a + P'b + \ldots$ une somme analogue à (4), formée à partir d'un point P' différent de P ; écrivons ensuite la différence :

$$(P) - (P') = Pa - P'a + Pb - P'b + Pc - P'c + \ldots \qquad (5)$$

D'après le lemme, chacune des différences telle que $Pa - P'a$ est égale à une somme de tétraèdres ayant PP' comme arête commune, et les arêtes des différents polygones a, b, c, ... comme arêtes opposées. Soit finalement KL une arête commune à a et à b ; $PP'KL$ est un terme de $Pa - P'a$ et $PP'LK$ un terme de $Pb - P'b$. La différence (5) est-elle nulle ? Oui si les tétraèdres s'éliminent 2 à 2. Cela nécessite qu'ils soient de signes contraires, ou aussi que le polyèdre puisse être orienté de telle façon que, si KL est une arête de a, LK soit une arête de b (1).

Notre théorème et, par conséquent, la définition du volume s'appliquent donc aux seuls polyèdres vérifiant cette condition, qui ne semble pas avoir été envisagée avant Möbius. Il est dès lors conduit à étudier l'orientation des polyèdres, étude d'où sortira sa grande découverte des surfaces unilatérales (2). Les

(1) Möbius a procédé autrement, en étudiant d'abord la question de l'orientation des polyèdres, ce qui lui permettait de prendre comme hypothèse, pour le théorème du paragraphe 21, l'orientabilité du polyèdre considéré. Cet ordre n'est cependant pas l'ordre naturel.

(2) C'est le terme dont se sert Möbius dans le mémoire adressé à l'Académie.

douze premiers paragraphes sont consacrés à ce problème. Dans le cas des polygones, on a la proposition :

« A chaque arête d'un polygone plan, on peut assigner un sens tel que lorsque deux arêtes ont un point commun, celui-ci soit toujours extrémité de l'une et origine de l'autre. »

Pour les polyèdres, le théorème analogue s'énonce :

« On peut attribuer aux surfaces qui limitent un polyèdre un sens tel que chaque arête soit parcourue une fois dans un sens et une fois dans l'autre, lorsque l'on parcourt les différents polygones dans le sens indiqué. Cette règle, que nous appellerons la loi des arêtes, a été admise jusqu'ici sans discussion par tous les géomètres. Nous verrons cependant qu'elle exige une étude plus précise » (§ 2) [1].

Nous en arrivons aux idées essentielles des paragraphes 7 et 8. Partons d'un polyèdre dont toutes les faces sont des triangles (Trigonalpolyeder), et écrivons-les sous la forme d'une suite telle que deux triangles successifs aient toujours une arête commune. Ainsi, dans le cas du tétraèdre *ABCD*, on a les triangles *BCD*, *CDA*, *DAB*, *ABC* que l'on peut aussi écrire comme une suite périodique illimitée *BCDABCDABC...*, ce qui est permis grâce à la définition du polyèdre. De même, si l'on considère l'hexaèdre obtenu en construisant de part et d'autre d'un triangle *ABC* les tétraèdres *ABCD* et *ABCE*, on a la suite :

BCDABECADBCEABDCAEBCD...

dont la période est 18. Remarquons qu'il n'est pas toujours possible de construire une suite contenant tous les triangles qui constituent la surface du polyèdre. Ainsi, prenons par exemple l'octaèdre dont les sommets sont représentés par *ABCDEF* et les huit faces par *ABC*, *BDC*, *DEC*, *BAC*, *BAF*, *DBF*, *EDF*, *AEF*. On peut alors écrire la suite de période 6 : *ABCDEFABC*, qui ne renferme ni le triangle *EAC* ni le triangle *DBF*. La surface connexe formée par les triangles de la suite précédente portera le nom de zone (§ 7). Au paragraphe 8, Möbius établit l'existence de polyèdres qui ne vérifient pas la loi des arêtes :

« Lorsque la loi des arêtes s'applique à un polyèdre fait de triangles, les triangles que l'on extrait d'une zone sont à prendre alternativement

[1] En 1837 déjà, Möbius avait abordé une question semblable : « Nous savons que chaque arête d'un polyèdre est commune à deux faces. Si nous choisissons alors de parcourir toutes les faces dans le même sens, chaque arête sera parcourue une fois dans un sens et une fois dans l'autre » [*66 f* ; ou *66 a*, t. 3, p. 78].

positifs et négatifs ; dès lors, le nombre d'éléments formant une période doit être pair. La loi des arêtes n'est donc plus vérifiée aussitôt que le nombre de termes d'une période est impair. »

Et plus loin :

« La suite la plus simple en désaccord avec la loi des arêtes est : *ABCDEABC*.

En effet, les triangles :

$$(R)\ ABC,\ BCD,\ CDE,\ DEA,\ EAB...$$

sont à prendre alternativement avec le signe $+$ et $-$, et le triangle *ABC* qui occupe la première place et le triangle *ABC* qui occupe la sixième place sont de signe contraire, comme c'est d'ailleurs le cas pour un triangle quelconque. Pour obtenir un polyèdre à partir de cette zone, on doit encore introduire le sommet *F* et les triangles *FAC*, *FBD*, *FCE*, *FDA*, *FEB*, afin de supprimer les arêtes libres *AC*, *BD*, *CE*, *DA*, *EB*... Ce polyèdre a ainsi 6 sommets, 10 faces et 15 arêtes ; il n'est par conséquent pas eulérien » [1].

Au paragraphe 9, Möbius indique une propriété remarquable de ce type de polyèdre :

« La particularité de la structure du polyèdre que nous venons de construire est mise en évidence par le fait suivant : on peut parcourir la surface de ce polyèdre de telle façon qu'après avoir effectué un tour complet, on se retrouve de l'autre côté de la surface, sans que le chemin suivi ne perce aucune des faces empruntées. Si l'on parcourt les triangles de la zone (*R*), le signe du premier triangle *ABC* est positif et celui du sixième *ABC* est négatif ; or cela est possible seulement si l'on se retrouve, après ce trajet, à l'antipode de son point de départ. »

Les zones à un, respectivement à deux côtés, sont caractérisées par une intéressante propriété, que Möbius expose au paragraphe 10 :

« Entre les deux catégories de zone, il existe la remarquable différence suivante : la zone à un côté contenant $2n + 1$ triangles est limitée par un seul polygone à $2n + 1$ arêtes, tandis que la zone à deux côtés contenant $2n$ triangles est limitée par 2 polygones disjoints formés chacun de n arêtes. En effet, si *F*, *G*, *H*, *I* sont quatre sommets qui se succèdent dans la suite qui détermine une zone, les deux triangles consécutifs *FGH* et *GHI* ont l'arête *GH* en commun, et les arêtes *FG* et *HI* en commun avec le triangle qui précède *FGH* et celui qui suit *GHI*, alors que les arêtes *FH* et *GI* appartiennent au périmètre de la zone. Dès lors, chaque couple de sommets séparés par un troisième sommet

[1] En 1881, C. Reinhardt [77] reprend les principales idées de Möbius. Puis il explique comment on peut construire simplement un polyèdre à un côté.

est frontière d'une arête limite de la zone. Il en va de même du dernier et du deuxième sommet, ainsi que de l'avant-dernier et du premier. Par exemple, le périmètre de la zone $ABCDE$ à 5 termes est formé par le pentagone $ACEBD$, tandis que le périmètre de la zone $ABCDEF$, à 6 termes, est formé de deux triangles disjoints ACE et BDF. »

Il est bien sûr difficile d'imaginer ces polyèdres unilatéraux, dont la construction, toute formelle, a été précisée au paragraphe 9. C'est vraisemblablement la raison qui a conduit Möbius à chercher un modèle simple de surface unilatérale. L'exemple qu'il donne (§ 11) est aujourd'hui classique :

« On peut se faire une idée très claire de la grande diversité des zones de ce genre à l'aide d'une feuille de papier coupée en forme de rectangle $ABB'A'$. Plions d'abord cette feuille de façon que AB reste constamment parallèle à lui-même, jusqu'à ce que A se confonde avec A' et B avec B' ; on obtient une zone à deux côtés ayant comme frontière les arêtes circulaires AA' et BB'. En second lieu, on amène A en coïncidence avec B' et B avec A' en tenant le segment AB fixe et en faisant subir à $A'B'$ une rotation de 180 degrés. Cette surface a une seule frontière et un seul côté, car on peut la peindre entièrement sans traverser la frontière. »

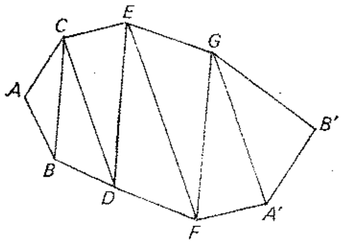


FIG. 20

Un texte figurant dans les papiers de Möbius et reproduit au tome 2 de ses œuvres [*66 a*, p. 519] fera mieux comprendre l'origine de la découverte de cette célèbre surface :

« Soit n points $A, B, C, D, \ldots, M, N$ formant la suite périodique... $MNABCD$..., qui détermine une zone composée des n triangles ABC, $BCD, \ldots, MNA, NAB$. Coupons cette dernière le long de l'arête AB et étendons la figure obtenue sur un plan, de manière à avoir une suite de n triangles. Comme les points A et B appartiennent aussi bien au premier triangle qu'au dernier, nous représenterons les extrémités de celui-ci par A' et B' (voir la fig. 20). Les n triangles formeront alors un polygone à $n + 2$ arêtes, dont la suite des sommets sera $AB, \ldots, B'A'\ldots$ lorsque n est pair, et $AB, \ldots, A'B'\ldots$ dans le cas contraire.

A partir de ce polygone, on reconstitue la zone initiale en faisant coïncider A avec A' et B avec B'. De cette façon, lorsque n est pair, le périmètre de la zone est constitué par deux polygones disjoints ayant $1/2\, n$ côtés chacun, tandis que, lorsque n est impair, la zone est limitée par un polygone à n côtés. »

Lorsque n est pair, A et A' se trouvent sur la même ligne et il n'y a pas de torsion. Lorsque n est impair, A et A' ne se trouvent pas sur la même ligne et il y a torsion.

Le moment est venu d'éclaircir un point que nous avons effleuré à la page 49. Il s'agit de la question de priorité entre Listing et Möbius pour la découverte des surfaces unilatérales. Rappelons d'abord les faits dans leur ordre chronologique :

1) On trouve dans les manuscrits de Listing, sur une feuille détachée du 24 juillet 1858, le croquis et la description de la surface que l'on appelle aujourd'hui le ruban de Möbius. Cette figure est reprise dans son article de 1862, accompagnée du texte suivant :

« ... si l'on veut aller d'un point à son antipode sans percer la surface il faut nécessairement traverser la frontière... Il est peut-être utile de profiter de cette occasion pour préciser qu'une surface complètement limitée par une courbe fermée sans nœud peut posséder des propriétés totalement différentes de celles qui viennent d'être citées, comme le montrent les figures suivantes » (voir les fig. *8 a* et *8 b*, p. 48).

2) Dans les ébauches du travail que Möbius effectuait en vue du Grand Prix, C. Reinhardt a retrouvé, sur un papier daté de septembre 1858, l'indication de la découverte des polyèdres à un côté et de la surface qui nous occupe [*66 a*, t. 2, p. 519].

Pour l'instant, il semble que cette étonnante concordance dans les dates ne soit que le fruit du hasard, ou la concrétisation d'une idée qui était dans l'air, et ceci d'autant plus que l'histoire des sciences est riche en rencontres de ce genre. Cependant, un fait d'apparence secondaire permet d'imaginer l'existence d'une influence extérieure expliquant, en partie du moins, cette coïncidence. On trouve, tant dans les manuscrits de Listing que dans le *Census*, le croquis d'une surface (voir fig. *8 b*) inusitée jusqu'alors en mathématiques, et qui sert aussi à illustrer le texte que nous venons de rappeler. Or on peut voir cette même surface dans les papiers de Möbius ([*66 a*], t. 2, p. 541 ; voir *supra*, fig. 21). S'agit-il d'une coïncidence ? Vraisemblablement pas, car Möbius ajoute :

« D'après une communication orale de Gauss ; j'ignore comment Gauss a été amené à considérer cette surface. »

Il est alors loisible d'admettre que si Gauss a parlé de cette surface à Möbius, il en fait de même avec Listing, qu'il rencontrait fort souvent, et qu'il avait incité à s'occuper de topologie. On peut donc également penser que le ruban de Möbius, qui apparaît dans le même contexte chez nos deux auteurs, remonte à Gauss. Pour conclure, disons que même si Listing est prioritaire, aussi bien par la date de sa découverte que par celle de sa publication, il est légitime de donner à cette surface le nom de ruban de Möbius. Pour Listing, c'était uniquement une forme secondaire, faisant exception à celles qu'il étudiait, et juxtaposée mais non intégrée à son étude. Pour Möbius, au contraire, le ruban dont

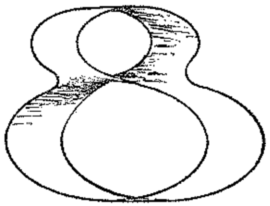


Fig. 21

il a l'honneur de porter le nom est un élément nécessaire, indispensable. Möbius n'a pas essayé de situer ses surfaces unilatérales dans le cadre de la classification de 1863 (voir p. 91 sq.). On le regrettera d'autant plus que notre auteur avait conscience de ce problème, comme l'attestent les passages suivants, tirés du mémoire présenté pour le Grand Prix :

« Parce qu'enfin chaque forme primitive est en corrélation élémentaire avec une surface plane et qu'elle a par conséquent, de même qu'une telle surface, 2 côtés différents, il faut aussi que chaque surface fermée décomposable en formes primitives ait 2 côtés. Donc une surface fermée unilatérale ne peut être décomposée en 2 formes primitives et en conséquence elle ne peut pas non plus être comprise dans les surfaces fermées qu'on a classifiées maintenant » *(sic)* (§ 57, p. 91).

Puis plus loin (p. 95) :

« Le pentagone *ACEBD* qui renferme la surface unilatérale formée par les 5 triangles *ABC*, *BCD*, ..., *EAB*, n'est pas une union, et par conséquent le polyèdre limité par ces triangles et les 5 triangles de la série (*Z*) [1] ne peut appartenir au nombre des polyèdres maintenant classifiés. D'ailleurs, les nombres *F*, *S*, *A* valent respectivement 10,

[1] (*Z*) ... *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEA*, *EAB* (p. 11).

6, 15, d'où il s'ensuivrait $n = 3/2$, pendant que pour un polyèdre bilatéral n est toujours un entier positif et par conséquent la somme de ses faces, de ses sommets et de ses arêtes est toujours un nombre pair » *(sic)*.

1.4. *Conclusions*

Möbius a défini l'homéomorphisme, pris en considération et résolu pour la première fois le problème de la classification des lignes et des surfaces (bilatérales), closes ou non, déterminé un invariant topologique : leur ordre de connexion, et ceci par une voie originale, montré l'existence d'une relation entre ce nombre et la caractéristique d'Euler, abordé le problème de l'homéomorphisme entre corps de l'espace, introduit rigoureusement, et de l'intérieur, les surfaces unilatérales. Si Euler, Listing, Riemann et d'autres ont donné des béquilles à la topologie, Möbius lui a donné des ailes.

Néanmoins, l'influence de son œuvre sur le développement de la topologie ne fut pas aussi importante que ce que l'on aurait été en droit d'attendre, ni la notoriété de Möbius ce qu'elle aurait dû être. D'abord, parce que notre auteur était un modeste, qui répugnait à parler de ses travaux. Ensuite, parce que ses contributions datent des dernières années de sa vie, ce qui ne lui a peut-être pas permis de développer ses idées et d'en faire une étude systématique, libérée de la théorie des polyèdres, qui était l'arbre cachant la forêt. Finalement, il est quasi certain que si l'Académie lui avait décerné le prix, amplement mérité par l'extraordinaire originalité du mémoire, ses résultats auraient eu une diffusion large et rapide ; tandis que les quelques pages, d'une lecture relativement difficile, traitant d'un sujet ne paraissant se rattacher à rien, et, qui plus est, parues dans un périodique d'ordre secondaire, n'eurent guère d'audience.

A quelques pas de là dans l'espace et dans le temps (Brno, 1865), le moine Johann Mendel découvrait les lois fondamentales de l'hérédité ; il n'eut pas plus de chance que Möbius, peut-être d'ailleurs pour les mêmes causes. « Le mémoire de Mendel fut peu remarqué, sans doute en raison de sa publication dans un périodique peu répandu. Il en était autrement pour Naudin, qui, en outre, avait reçu, dès 1860, pour ses recherches, la brillante consécration du Grand Prix des Sciences physiques de l'Académie des Sciences de Paris, avec un rapport très motivé » [1].

Singulière coïncidence !

[1] M. Caullery, *Génétique et hérédité*, Paris, Presses Universitaires de France, 1948, p. 36.

§ 2. LES CONTRIBUTIONS DE CAMILLE JORDAN

2.1. *Généralités*

Jusqu'ici, les principaux développements de la topologie sont dus, presque exclusivement, à des chercheurs de langue allemande. Rompant avec cette tradition, Camille Jordan publie, en 1866, deux importants mémoires, qui traitent de problèmes essentiels pour l'*analysis situs*. C'est à plusieurs reprises, et avec un égal bonheur, que Jordan s'est par la suite occupé de questions qui relèvent de cette science. Les travaux de 1866 sont datés de février et de janvier, l'inversion des dates provenant peut-être de ce que le premier, qui est logiquement antérieur au second, lui est chronologiquement postérieur. « C'est souvent à la fin d'un ouvrage que l'on trouve ce qu'il eût fallu mettre devant. »

2.2. *Sur la déformation des surfaces*

Voici l'impeccable présentation que Jordan fait de ce travail [*48 a* ; ou *48 g*, p. 85-89] :

« Un des problèmes les plus connus (1) de la géométrie est le suivant : trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et inextensibles puissent être appliquées l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.

« On peut se proposer un problème analogue, en supposant au contraire que les surfaces considérées soient extensibles à volonté. La question ainsi simplifiée rentre dans la géométrie de situation, et nous allons la résoudre en démontrant le théorème suivant :

« *Théorème.* — Pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et extensibles à volonté soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature, il faut et il suffit :

« 1. Que le nombre des contours séparés qui limitent respectivement ces deux portions de surfaces soit le même. (Si les surfaces considérées sont fermées, ce nombre est nul.)

« 2. Que le nombre maximal des contours fermés ne se traversant ni eux-mêmes ni mutuellement nulle part, que l'on peut tracer sur chacune des deux surfaces sans la partager en deux régions séparées, soit le même de part et d'autre. »

(1) Ce problème avait été mis à la mode par les recherches de Gauss (voir p. 31 sq.). En 1859, il est proposé comme Grand Prix de l'Académie des Sciences de Paris, et suscite notamment les travaux célèbres de Bour, Bonnet, Codazzi.

Dans un article daté de 1858, intitulé *Note sur la théorie des polyèdres*, Poinsot [*73 b*] écrivait :

« Ce qui rend cette théorie des polyèdres très difficile, c'est qu'elle tient essentiellement à une science, presque encore neuve, que l'on peut nommer géométrie de situation, parce qu'elle a principalement pour objet, non pas la grandeur ou la proportion des figures, mais l'ordre et la situation des éléments qui les composent. »

C'est probablement par l'entremise de ce texte que Jordan eut connaissance de la géométrie de situation ; il l'a d'ailleurs utilisé comme introduction à une analyse de ses travaux, qu'il avait écrite en vue de sa candidature à l'Académie des Sciences [*48 f* ; ou *48 g*, p. 553].

Nous passerons sous silence la démonstration, assez aisée, de la nécessité de la condition, pour nous attacher plus spécialement à la preuve que Jordan donne de la suffisance. Vraisemblablement conscient du manque de maniabilité du critère « flexible et extensible », Jordan le remplace par le principe suivant « qu'on peut regarder comme évident, et prendre au besoin comme définition » :

« Deux surfaces S, S' sont applicables l'une sur l'autre si l'on peut les décomposer en éléments infiniment petits, de telle sorte qu'à des éléments quelconques contigus de S correspondent des éléments contigus de S' » (1).

Nous avons signalé, à propos de Möbius (p. 91), l'avantage d'une définition de ce type. Quant à la remarquable concordance dans les dates (Möbius, 1863 ; Jordan, 1866), elle montre, une fois encore, que les idées directrices de la science sont filles de leur siècle, bien avant que d'être celles de leurs pères.

Le principe de la démonstration consiste évidemment à décomposer S et S' en éléments infiniment petits, de sorte qu'à des éléments contigus de S correspondent des éléments contigus de S'. Soit $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$ les m frontières de S et $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$ les n contours disjoints (2) qui, par hypothèse, ne partagent pas la surface. Jordan montre qu'il est possible de construire $m + 2n - 1$ « transversales » (sections transverses) qui ne mor-

(1) Neumann (p. 70) et Möbius (p. 90) s'étaient déjà servis d'un critère semblable.

(2) Dans une communication à l'Académie des Sciences, JORDAN écrivait : « Une surface sera dite d'espèce (m, n) si elle est limitée par m contours fermés et n contours fermés ne se coupant eux-mêmes ni mutuellement, sans la partager en deux régions distinctes. Une surface d'espèce (m, n) est $m + 2n$ fois continue *(zusammenhängend)* en donnant à ce terme la même définition que M. Riemann. On doit excepter le cas où $m = 0$; la surface est alors non plus $2n$ fois mais $2n + 1$ fois continue » [*48 b* ; ou *48 g*, p. 3-10].

cellent pas la surface et la transforment en une surface limitée par une seule ligne. On la partage en éléments infiniment petits en construisant de nouvelles transversales. Une décomposition semblable, appliquée à S', permet d'obtenir la correspondance souhaitée.

2.3. *Des contours tracés sur les surfaces* [*48 c* ; ou *48 g*, p. 91-111]

Si le problème que nous venons d'exposer n'était pas complètement nouveau — Möbius et Neumann en avaient déjà parlé — celui dont s'occupe ce second travail appartient en propre à Jordan, à tel point même qu'aucun mathématicien ne l'abordera au cours de la période qui nous intéresse. Laissons-lui le soin de nous indiquer le but de cette étude :

« Deux contours fermés quelconques, tracés sur une surface donnée, seront dits réductibles l'un à l'autre, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation progressive.

« Deux contours quelconques tracés sur un plan sont toujours réductibles l'un à l'autre ; mais il n'en est pas de même sur toute surface : ainsi, par exemple, il est clair que dans un tore un méridien et un parallèle forment deux contours irréductibles.

« Nous nous proposons ici de déterminer dans quels cas deux contours, tracés sur une surface donnée, sont réductibles l'un à l'autre. »

Nous tairons les longs raisonnements qui conduisent Jordan à sa solution, en partie inexacte, pour ne relever que quelques points qui nous paraissent importants.

« Soit C et p une courbe et un point quelconques de la surface, a et b deux points de C infiniment voisins l'un de l'autre et deux lignes ap et bp infiniment voisines ; ab est alors réductible à apb, et par suite C est réductible au contour indiqué par les flèches » (voir la fig. 22).

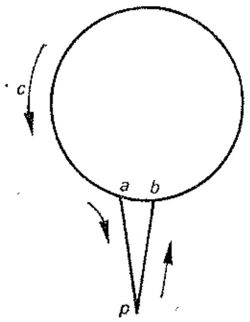


FIG. 22

C'était là le lemme 2 de la page 112 [*48 g*]. La ligne ap parcourue deux fois de suite en sens différent est dite adjointe au contour C.

Imaginons maintenant la surface coupée suivant chacune des n lignes $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$ et soit $C', C'', C_1', C_1''\ldots$, leurs deux bords respectifs ; d'après les résultats du mémoire précédent, nous savons qu'il existe une section transverse joignant deux quelconques de ces n contours, disons D et D', et ne partageant pas la surface. En lieu et place des deux contours distincts, on aura ainsi un contour unique K formé de D, D' et de la section transverse. Rien ne nous empêche ensuite de choisir pour D et D' les deux bords C' et C'', et de faire en sorte que la section transverse, appelons-la Γ, joigne les deux points qui correspondent à un même point de C. Le contour K sera dès lors formé de C, Γ, et de C et de Γ décrits en sens inverse du sens primitif.

« On voit qu'un contour C étant donné, il y a lieu de distinguer l'un de l'autre les deux sens dans lesquels il peut être décrit. Nous conviendrons de désigner par C le contour décrit dans un certain sens choisi à volonté, et par C^{-1} le même contour décrit en sens inverse. On aura alors entre le contour K et les quatre contours composants C, Γ, C^{-1}, Γ^{-1} la relation symbolique $K = C\Gamma C^{-1}\Gamma^{-1}$ » (p. 113).

Jordan appelle encore « contours élémentaires » ceux qui s'obtiennent en adjoignant à l'un des contours

$$C, C_1, \ldots, C_{n-1}, \Gamma, \ldots, \Gamma_{n-1}, A, A_1, \ldots, A_{m-1}$$

(les A_i représentant les contours de la surface initiale) celle des lignes pa, $pa_1\ldots$ qui y aboutit. Ainsi, $paCap$ sera le contour élémentaire correspondant à C. Nous le désignerons par $[c]$. La solution de Jordan s'exprime par les théorèmes :

1) « Tout contour est réductible à un simple point ou à un système de contours élémentaires » (théorème 1, p. 122) ;

2) « Deux systèmes de contours élémentaires sont irréductibles, si après avoir remplacé dans l'expression de chacun d'eux les contours composés $[\Gamma][C][\Gamma^{-1}][C^{-1}] = \Delta$ et $[C][\Gamma][C^{-1}][\Gamma^{-1}] = \Delta^{-1}$ partout où ils se présentent, par leur expression en fonction des autres contours élémentaires, et supprimé tous les contours décrits deux fois de suite en sens contraire, ils ne sont pas formés des mêmes contours élémentaires décrits dans le même ordre. »

Comme nous l'avons déjà signalé, cette solution n'est qu'en partie correcte. Si, en effet, elle est applicable sous cette forme aux surfaces munies d'un bord, il faut la remplacer, dans le cas contraire, par la suivante : deux courbes sont homotopes si et seulement si on peut les réduire à une composition de contours élémentaires qui appartiennent à une classe d'éléments conjugués du groupe fondamental (voir par exemple [*82*], p. 174-176). Pour une critique détaillée de ce travail de Jordan, on se référera à l'ouvrage de Gieseking [*34*, p. 10-23].

Quoique Jordan « se préoccupât peu du choix des notations » [*55 a*, p. 60], celles qu'il a choisies pour son étude de l'homotopie sont remarquables. Comment, en effet, ne pas être frappé par le fait qu'il appelle Γ^{-1} le contour Γ parcouru en sens inverse, et Γ^0 le contour que l'on ne décrit pas, alors qu'il notera, dans son *Traité des substitutions* de 1870, l'inverse de a, a^{-1}. Si Jordan n'est pas arrivé à l'idée de groupe fondamental, il a largement déblayé le chemin qui y mène.

2.4. *Jordan et la topologie générale.*

Bien que nous nous limitions, dans cet ouvrage, à l'histoire de la topologie combinatoire, il s'est fait, au cours du siècle passé, des découvertes qu'on ne saurait taire, tant leur importance est grande pour l'*analysis situs* et pour la pensée mathématique dans son ensemble. Elles sont dues au génie de Cantor ; c'est dans la correspondance que ce grand homme eut avec Dedekind, l'un de ses premiers défenseurs, que nous suivrons leur évolution, du moins quant à la partie qui nous intéresse. Nous verrons ensuite comment ces recherches peuvent expliquer certaines contributions de Jordan à la topologie générale.

En date du 20 juin 1877 [*17*, p. 200-201] (1), Cantor soumet à son ami la proposition suivante, aussi singulière qu'inattendue :

« Je voudrais savoir si vous estimez qu'une méthode de démonstration appliquée par moi est arithmétiquement rigoureuse ? Il s'agit de montrer que les surfaces, les volumes et même les variétés (2) continues à ρ dimensions peuvent être mis en correspondance univoque avec des courbes continues, donc avec des variétés à une seule dimension, que les surfaces, les volumes, les variétés à ρ dimensions elles aussi ont donc la même puissance que les courbes ; cette opinion paraît opposée à celle généralement répandue, notamment parmi les représentants de la nouvelle géométrie, suivant laquelle on parle de variétés simplement, doublement, triplement..., ρ fois infinies ; on se représente même parfois les choses comme si l'on obtenait l'infinité de points d'une surface en quelque sorte en élevant au carré, celle d'un cube en élevant au cube l'infinité des points d'une ligne. »

(1) La deuxième partie de cet ouvrage est consacrée à la traduction de la correspondance Cantor-Dedekind que E. Noether et J. Cavaillès ont publiée en 1937 [*17*].
(2) En allemand *Gebilde*.

Le 25 du même mois, Cantor revient sur ce sujet. Il commence par fournir un énoncé plus précis de son théorème [*17*, p. 205] :

« Une multiplicité continue à e dimensions peut être mise en correspondance univoque avec une multiplicité continue à une dimension, ou (ce qui n'est qu'une autre forme du même théorème) les points (éléments) d'une multiplicité à ρ dimensions peuvent se déterminer par une coordonnée réelle t de telle sorte qu'à chaque valeur réelle de t dans l'intervalle $(0, \ldots, 1)$ corresponde un point de la multiplicité, mais aussi, réciproquement, qu'à chaque point de la multiplicité corresponde une valeur déterminée de t dans l'intervalle $(0, \ldots, 1)$. »

Il donne ensuite une nouvelle démonstration de cette proposition, et termine sa lettre par des considérations philosophiques, qui révèlent l'importance de cette question, tout en illustrant remarquablement l'état d'esprit qui gouvernait la mathématique de cette époque [*17*, p. 210] :

« J'ai suivi avec intérêt depuis plusieurs années les efforts que l'on a consacrés, après Gauss, Riemann, Helmholtz et d'autres, à la clarification des questions qui touchent aux premières hypothèses de la géométrie. Il m'est apparu à cet égard que toutes les recherches faites dans ce domaine partent elles-mêmes d'une hypothèse non démontrée, qui ne m'apparaît pas comme allant de soi, mais bien plutôt comme ayant besoin d'être fondée. Je veux parler de l'hypothèse selon laquelle une multiplicité continue ρ fois étendue nécessite pour la détermination de ses éléments ρ coordonnées réelles indépendantes entre elles, le nombre de ces coordonnées ne pouvant être, pour une même multiplicité, ni augmenté, ni diminué.

« J'en étais venu à croire moi aussi à cette hypothèse, j'étais presque persuadé de son exactitude ; mon point de vue différait seulement de tous les autres en ceci, que je considérais cette hypothèse comme un théorème qui nécessitait au plus haut point une démonstration, et j'avais précisé mon point de vue sous forme d'une question que j'avais soumise à quelques collègues, en particulier aussi à l'occasion du jubilé de Gauss, à Göttingen, savoir la question suivante (1)... La plupart de ceux à qui j'ai soumis cette question se sont beaucoup étonnés que j'aie seulement pu la poser, car il se comprenait de soi que, pour la détermination d'un point dans une extension (2) à ρ dimensions, il fallait toujours employer ρ coordonnées indépendantes. Celui qui, pourtant, pénétrait le sens de la question, devait reconnaître qu'il fallait au moins démontrer pourquoi la réponse était « évidemment » non. Comme je l'ai dit, je faisais partie de ceux qui tenaient pour vraisemblable que la réponse

(1) Il s'agit du théorème que nous avons cité à la page précédente.
(2) *Ausgedehntheit*.

fût négative — jusqu'au moment tout récent où, par une succession assez complexe de pensées, je suis arrivé à la conviction que la réponse était affirmative sans aucune restriction. Peu après, je trouvai la démonstration que vous avez aujourd'hui sous les yeux » (¹).

De la lettre du 29 juin 1877, nous retiendrons les lignes suivantes, à juste titre célèbres dans l'histoire de la mathématique :

« Veuillez excuser mon zèle pour cette affaire, si je fais appel tellement souvent à votre bonté et à votre peine ; ce que je vous ai communiqué tout récemment est pour moi-même si inattendu, si nouveau, que je ne pourrai pour ainsi dire pas arriver à une certaine tranquillité d'esprit avant que je n'aie reçu, très honoré ami, votre jugement sur son exactitude. Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire : *je le vois, mais je ne le crois pas* » (²).

Nous clorons cette parenthèse par un extrait d'une lettre de Dedekind, qui parvint à débrouiller la curieuse situation engendrée par la découverte de Cantor [*17*, p. 215] :

« A l'encontre de ce point de vue, je déclare être convaincu (malgré votre théorème, ou plutôt par suite des considérations occasionnées par votre théorème) ou croire (je n'ai pas encore eu le temps de faire même seulement l'essai d'une démonstration) que le nombre de dimensions d'une multiplicité continue est, après comme avant, le premier et le plus important de ses invariants, et je dois prendre ici la défense de tous ceux qui ont écrit sur ce sujet jusqu'à ce jour. Je vous concède volontiers que cette constance du nombre de dimensions exige absolument une démonstration, et que, aussi longtemps que cette démonstration n'a pas été faite, l'on est en droit de mettre en doute la proposition. Mais je ne doute pas de cette constance bien qu'elle semble anéantie par votre théorème. Mais tous les auteurs ont évidemment fait l'hypothèse tacite, tout à fait naturelle, que pour une nouvelle détermination des points d'une multiplicité continue à l'aide de nouvelles coordonnées, ces dernières doivent être aussi des fonctions continues (en général) des anciennes coordonnées afin que ce qui apparaît comme étant continûment connexe (³) dans la première détermination de position reste continûment lié (⁴) dans la deuxième détermination de position. Je crois donc provisoirement à l'exactitude du théorème suivant : si l'on réussit à établir une correspondance complète univoque et réciproque (⁵) entre les points d'une multiplicité continue A à a dimensions d'une part, et

(¹) Ces considérations sont reprises dans [*14*].
(²) En français dans le texte.
(³) *Stetig zusammenhängend.*
(⁴) *Stetig verbunden.*
(⁵) « Eine gegenseitige eindeutige und vollständige Correspondenz. »

les points d'une multiplicité continue B à b dimensions, d'autre part, alors, si a et b sont inégaux, cette correspondance est nécessairement partout discontinue » (¹).

Les singulières idées dont nous venons de rappeler la genèse sont capitales pour notre histoire, et ceci au double titre suivant. En premier lieu, elles attirent l'attention, et d'une façon combien frappante, sur les deux mots clefs de la définition de la topologie, dont l'importance relative semble n'avoir pas été bien explicitée jusqu'alors. En établissant comment l'univocité et la continuité s'associent pour donner un sens à la notion de dimension, on mettait en évidence la richesse insoupçonnée que recelaient ces deux concepts. Et comme l'axiomatique et l'algèbre moderne sont nées avec la prise de conscience de ce que les relations et les opérations qui lient et combinent les êtres mathématiques entre eux sont plus importantes que ces êtres, de même on peut faire remonter l'origine de la topologie moderne à la prise de conscience de ce que les applications qui transforment un ensemble en un autre nous apprennent plus sur le compte de ces ensembles que ces ensembles eux-mêmes. « Dis-moi comment l'on te transforme, je te dirai qui tu es » (²). En second lieu, le côté paradoxal, voire choquant de ces idées, devait contribuer d'une façon essentielle à l'introduction de la rigueur comme condition *sine qua non* de la mathématique. Il paraît en effet impensable qu'un mathématicien, formé à l'école des fonctions continues sans dérivées et des théories de Cantor, puisse encore se fier au seul bon sens, et admettre des conclusions sous prétexte de leur évidence. C'est peut-être ainsi qu'il faut expliquer l'origine d'un célèbre théorème que Jordan, qui a été le premier à répandre en France les idées de Cantor, a publié dans son *Cours d'analyse* [*48 d*, t. III, 1887, p. 593], et dont voici l'énoncé :

« Il est donc établi que toute courbe continue C divise le plan en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure, cette dernière ne pouvant se réduire à zéro, car elle contient un cercle de rayon fini. »

Citons encore le théorème :

« Soit u, v... des fonctions des variables x, y... en même nombre que ces dernières, et définies dans un ensemble E. A chaque point, $(x, y...)$ de E correspond un point $(u, v...)$; la réunion de ces derniers

(¹) C'est en 1911 que Brouwer parvint à établir l'invariance topologique du nombre de dimensions [*11*].
(²) G. Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*, Paris, Presses Universitaires de France, 1963, p. 28.

points forme un ensemble F. Supposons qu'à chaque point de F corresponde réciproquement un seul point de E. Si l'ensemble E est borné et parfait (1), et les fonctions u, v... continues dans E, x, y... seront réciproquement des fonctions de u, v... continues dans F » [*48 e*, p. 53].

§ 3. LE « PROGRAMME D'ERLANGEN »

En 1872, Felix Klein achève un travail décisif pour l'évolution de la topologie et de la mathématique tout entière [*50 d* ou *d'* ; ou *50 b*, t. 1, p. 460-487]. La genèse de ce texte — qu'on appelle le *Programme d'Erlangen* parce qu'il fut présenté par Klein comme dissertation inaugurale à l'université de cette ville — n'a pas encore été suffisamment étudiée par les historiens de la mathématique (2). En première approximation, on peut dire que les idées maîtresses du *Programme* procèdent de trois sources, qui alimentent par ailleurs le gros de la pensée mathématique au XIXe siècle. Il s'agit d'abord de la notion d'application d'une surface sur une autre, de correspondance entre ensembles géométriques, que nous avons vue naître et grandir par les soins de Gauss et Möbius.

Il s'agit ensuite de cette théorie des invariants qui conduit Cayley (3) à envisager, dans un même schéma, géométrie projective et géométrie métrique, celle-ci devenant une partie de celle-là. Ce bien curieux résultat, Klein allait l'étendre en 1871 (4) aux géométries non-euclidiennes. La remarquable unité qui se fait ainsi sous la houlette de la géométrie projective préfigure celle, encore plus complète, que révélera le *Programme d'Erlangen*.

Enfin, avec la redécouverte des travaux de Galois en 1846, l'idée de groupe, qui avait montré ce dont elle est capable à l'occasion d'une question célèbre et difficile, se diffuse rapidement dans les cercles mathématiques.

Synthèse éblouissante de ces trois grandes conceptions, le *Programme* développe l'idée qu'une géométrie est l'étude des invariants d'un certain groupe de transformations. C'est un principe unificateur d'une étonnante fécondité qui apparaît là. Dans cette optique, la topologie devient l'étude des invariants du groupe des transformations bijectives et bicontinues. Klein

(1) En langue moderne, un ensemble parfait est un ensemble fermé.
(2) Cf. cependant F. Russo, *Groupes et géométrie. La genèse du « Programme d'Erlangen » de Felix Klein*, Paris, Palais de la Découverte, 1969 (série D, n° 129).
(3) En 1859, Cayley consacre six mémoires à cette théorie.
(4) Ueber die sogenannte nichteuklidische Geometrie, *Math. Ann.*, t. 6, Leipzig, 1871, p. 136. Repris dans [*50 b*, t. 1, p. 334].

ne fut pas le seul à apercevoir l'avantage qu'il y a de se placer dans cette perspective. Ainsi, en mars 1873, Clifford écrivait [*18 b*, p. 334-335].

> « La mise sur pied d'une correspondance entre deux ensembles, et la recherche des propriétés qui se conservent au cours de cette correspondance, peut être considérée comme l'idée centrale des mathématiques modernes : on la retrouve à travers toute la science pure et ses applications. »

La concordance des dates entre le *Programme d'Erlangen* et cette phrase de Clifford ne laisse aucun doute sur le fait que le *Programme* n'est pas un coup de tonnerre dans un ciel serein, mais une étincelle (de génie !) entre deux corps chargés aux limites de l'équilibre (1).

§ 4. LE PLAN EN TOPOLOGIE

La théorie des surfaces nouvelles, introduites par Möbius, se développe sous l'influence de Klein et de Schläfli, à qui l'on doit notamment une interprétation intuitive intéressante des surfaces à un côté et la caractérisation du plan projectif comme surface non orientable. Le présent paragraphe est dédié à l'histoire de ces découvertes.

Aux environs de 1873, Schläfli étudie les surfaces du troisième ordre, entre autres au point de vue de leur ordre de connexion [*80 d*]. Il remarque que, pour le déterminer, on doit ponctuer la surface. Or cette opération augmente l'ordre de connexion d'une unité. Il serait donc logique, conclut-il, de diminuer d'une unité l'ordre de connexion défini par Riemann, dans le cas des surfaces fermées [*80 e*, p. 152]. Klein [*50 e* ; ou *50 b*, t. 2, p. 64 sq.] se rallie à cette proposition ; il utilisera la définition de Schläfli dans tous ses travaux, et parlera simplement de l'ordre de connexion extraordinaire. A une autre occasion, Klein émet des réserves sur des résultats du mathématicien suisse. Schläfli avait attribué au plan l'ordre de connexion 0, à quoi Klein répond [*50 f* ; ou *50 b*, t. 2, p. 44] que cela revient à considérer l'infini comme un point ; c'est contraire à l'interprétation projective. Klein écrit à ce propos :

> « Les différences que nous avons établies pour les courbes et pour les surfaces se rapportent à leurs propriétés qui sont invariantes, aussi

(1) Pour plus de détails sur l'importance du *Programme d'Erlangen*, on pourra consulter les *Eléments d'histoire des mathématiques*, de N. Bourbaki (1re éd., Paris, 1960, p. 141-143, ou 2e éd., 1969, p. 170-172).

bien par des collinéations réelles que par des déformations continues. Dès lors apparaît naturellement la question de savoir quelles sont ces propriétés. La position de la question est la même que son homologue dans l'*analysis situs* ordinaire, et il faut distinguer soigneusement ce qui est commun de ce qui ne l'est pas. L'*analysis situs* s'occupe, en première instance, de formes situées entièrement dans le fini, en considérant deux éléments comme équivalents lorsque l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue. Il faut ensuite introduire des considérations spéciales, si l'on veut étendre notre théorie aux formes qui s'étendent à l'infini. Cet objectif peut être atteint en adjoignant à une déformation ayant lieu dans le fini, une transformation qui amène les points de l'infini dans le fini, et en considérant ensuite deux formes comme équivalentes lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre, par une transformation du genre de celles que l'on vient de définir, suivie d'une déformation continue » [50 *b*, t. 2, p. 41-42].

Plus loin, il remarque que, jusqu'à présent, l'infini fut toujours envisagé en *analysis situs* comme un point, ce qui entraîne la suppression de certaines classifications fort commodes des surfaces et des courbes, et il poursuit :

« Les résultats de ce type d'*analysis situs* ne sont par suite pas applicables tels quels à la conception projective, dans laquelle les éléments de l'infini se comparent aux éléments finis par des collinéations réelles... Au plan infini étudié dans l'optique projective, il faut attribuer l'ordre de connexion 2. On peut, en effet, y construire une ligne fermée, et une seule, ne le partageant pas, par exemple une droite. Et cependant, il n'est pas possible de transformer d'une façon continue le plan en un tore, dont l'ordre de connexion vaut également 2 » [*50 b*, t. 2, p. 41].

L'année suivante (1874), Klein revient sur cette question, à la suite d'une lettre de Schläfli [1], qui écrit :

« La conception projective permet également d'attribuer au plan l'ordre de connexion 0, si on le considère comme une surface double, c'est-à-dire, en quelque sorte, comme la limite d'un hyperboloïde à deux nappes » [*50 b*, t. 2, p. 63].

L'idée de surface double n'est pas, à proprement parler, différente de la notion de surface à un côté due à Möbius. Néanmoins, elle introduit une nuance qu'il est utile de préciser ; nous aurons à en reparler dans les pages consacrées aux travaux de Dyck. Le but de cette notion est de remplacer une surface à un

[1] Un extrait de cette lettre est reproduit par Klein [*50 b*, t. 2]. Nous n'avons pas retrouvé trace de la correspondance Klein-Schläfli à la Bibliothèque universitaire de Göttingen, où se trouvent les archives de Klein, ni à la Bibliothèque nationale suisse de Berne, qui conserve les écrits et la correspondance de Schläfli.

côté par une surface à deux côtés lui correspondant d'une certaine façon. On y parvient par le procédé suivant : on porte le long de la normale à la surface, et dans les deux sens, une même longueur *a*. Lorsque le pied de la normale décrit la surface, ses deux extrémités décrivent une surface qui se compose de deux nappes distinctes lorsque la surface initiale est à deux côtés, et d'une seule nappe si elle est à un côté. Cette conception présente l'avantage de permettre de raisonner dans tous les cas sur des surfaces à deux côtés, à condition toutefois d'en tenir compte au moment des conclusions. C'est ainsi, par exemple, que certains nombres seront divisés par 2 (*curvatura integra*, caractéristique de Dyck-Euler). L'intérêt de cette méthode a été fort bien mis en évidence dans un article de W. Boy [*9*].

Cette interprétation élimine les difficultés signalées par Klein, qui écrit :

« J'ai trouvé que la théorie de l'ordre de connexion des surfaces s'applique, sans modification, à la conception projective, lorsque l'on se décide à voir les surfaces impaires de la géométrie projective comme des surfaces doubles et une courbe impaire qui s'y trouve comme fermée, seulement lorsqu'elle a été parcourue deux fois » [1] [*50 b*, t. 2, p. 65].

Puis, plus loin :

« Cette introduction est d'autant plus valable qu'elle peut déjà rendre des services dans certaines parties de l'*analysis situs*, ne traitant pourtant que de figures entièrement situées dans le fini, comme c'est le cas pour la surface suivante... » (suit la description du ruban de Möbius)

Les considérations de Schläfli et les développements de Klein revenaient à reconnaître au plan projectif une structure de surface non orientable.

Dans un court mémoire, consacré à des questions de principe, Klein fait la distinction entre propriétés absolues et propriétés relatives [*50 g* ; ou *50 b*, t. 2, p. 67-69] :

« Une propriété est dite absolue, lorsqu'une variété la possède indépendamment de l'espace dans lequel elle se trouve plongée. Une propriété relative, en revanche, dépend de l'espace d'immersion. Une telle propriété n'est invariante que par les déformations de la variété qui ont lieu à l'intérieur de l'espace. »

[1] Une ligne fermée *s* est paire ou impaire selon qu'elle est coupée par un plan *U*, ne contenant aucune de ses parties, en un nombre pair ou en un nombre impair de points.

« Une surface fermée *F* est paire ou impaire selon qu'une droite *a*, n'ayant aucune de ses parties dans *F*, la coupe en un nombre pair ou en un nombre impair de points » [*86*, p. 81-83].

Dans cet ordre d'idées, il constate que le fait, pour une surface, d'avoir un ou deux côtés ne constitue pas une propriété absolue, puisqu'elle dépend de la position de la normale, après qu'elle a effectué un tour complet de la surface. Klein donne la définition suivante, très utilisée par la suite :

« On dessine sur un élément de surface une courbe fermée, sur laquelle on choisit un certain sens ; une surface est alors double, si et seulement s'il est possible de déplacer cette indicatrice de telle façon que son sens se soit inversé, lorsqu'elle a regagné sa position de départ. »

Dyck (voir p. 137 sq.) et, plus tard, Steinitz [*87 b*] développeront des conséquences de cette distinction entre surfaces à un ou à deux côtés d'une part, et surfaces dont l'indicatrice peut s'inverser ou ne pas s'inverser d'autre part.

Chapitre IV

LA TOPOLOGIE AU SERVICE DE L'ANALYSE

(suite)

Ainsi que nous l'avons vu au chapitre Ier de cette deuxième partie, si Riemann ne peut être regardé comme le père de la topologie, c'est à ses travaux que l'on doit rattacher le mouvement d'idées qui allait donner à l'*analysis situs* sa vraie place parmi les disciplines mathématiques. Grâce à la notion de surface de Riemann, et aux concepts qui s'y rapportent, notre science devient indispensable à l'étude de l'un des domaines les plus cultivés de la mathématique du XIXe siècle : la théorie des fonctions. Par ce canal, la topologie se répand dans le monde mathématique. Sous l'impulsion de Felix Klein et de ses élèves, la théorie des fonctions se développe rapidement, entraînant l'*analysis situs* dans son sillage. Leurs travaux recèlent les principaux progrès réalisés en topologie de 1875 à 1890.

§ 1. LES TRAVAUX DE KLEIN

Parmi les études que Klein consacre à la théorie des fonctions, on doit avant tout citer un cours, donné à l'Université de Leipzig en 1880-1881, et publié en 1882 [*50 h* ; ou *50 b*, t. 3, p. 499-573]. Deux passages de ce livre intéressent plus particulièrement notre histoire.

1.1. Au paragraphe 8, intitulé « Classification des surfaces fermées d'après le nombre p », Klein écrit :

« Toutes les surfaces qui peuvent s'appliquer, univoquement et conformément, les unes sur les autres sont équivalentes à notre point de vue...

« Il est encore plus important », poursuit Klein après quelques généralités, « de faire connaissance d'un élément qui est invariant, non seulement pour les transformations conformes, mais également pour les transformations univoques. Il s'agit du nombre p de Riemann, nombre de rétrosections que l'on peut construire sur une surface, sans la morceler ».

Dans une note qui se rapporte à la première phrase de la citation précédente, Klein précise :

« Dans toutes ces questions, on utilise uniquement des transformations définies par des fonctions continues. »

Il termine cette note en indiquant que les surfaces qui présentent des points singuliers, des lignes de pénétration, seront exclues de ses raisonnements, ainsi d'ailleurs que les surfaces doubles et les surfaces qui ne peuvent être rendues simplement connexes par un nombre fini de coupures. Nous avons déjà rencontré cette dernière condition dans le chapitre dédié aux travaux de Neumann (p. 73) (1884). A cette occasion, on doit rappeler que Klein et Neumann enseignaient ensemble à Leipzig.

Après avoir illustré la définition du nombre p par quelques exemples, Klein écrit :

« Qu'il soit impossible d'établir une correspondance univoque et continue entre deux surfaces n'ayant pas le même p semble évident. Le théorème réciproque, en revanche, est plus difficile à démontrer [1]... Cette proposition nous autorise, dans les recherches sur les surfaces fermées ne faisant intervenir que des relations de position, à considérer, pour chaque valeur de p, une surface aussi simple que possible. Dans ce sens, nous parlerons de surfaces normales. Lors d'une étude quantitative, les surfaces normales ne suffisent naturellement pas ; tout au plus, peuvent-elles donner quelques indications.

« La sphère et le tore serviront de formes normales pour $p = 0$ et $p = 1$. Pour les autres valeurs de p, on considère une sphère munie de p anses [2]. Le cas $p = 3$ est illustré dans la figure suivante (voir fig. 23). »

Au bas de la page 527, Klein place une note très intéressante pour l'histoire des mathématiques. Elle se rapporte au mot « évident » qu'il a utilisé au début du texte que nous venons de citer :

« Cela ne signifie nullement que cette sorte d'évidence géométrique ne nécessite pas d'étude détaillée. A ce propos, on lira les explications que G. Cantor a données dans le *Journal de Borchardt*, t. 84, p. 242 sq... » [3].

[1] Pour la démonstration, KLEIN renvoie au travail de Jordan (voir p. 112).
[2] Klein utilise les termes *Anhängseln*, *Handhaben*.
[3] Voir à ce sujet nos p. 116-119.

Cette remarque est significative pour l'histoire de la crise de rigueur dont nous avons parlé à maintes reprises. L'évidence géométrique elle-même est ainsi mise en cause. Quoique timide, cette tentative, ou plutôt l'état d'esprit dont elle procède, annonce un mouvement irréversible. Deux ans plus tard, c'est de la voix de Neumann que s'élèvent les mêmes avertissements (voir p. 74). Relevons aussi que, si la crise de rigueur plonge ses racines au plus profond du XIXe siècle, c'est le célèbre mémoire de Cantor qui met le feu aux poudres. Le « doute méthodique », qui s'instaure en mathématique, loin de compromettre la solidité de

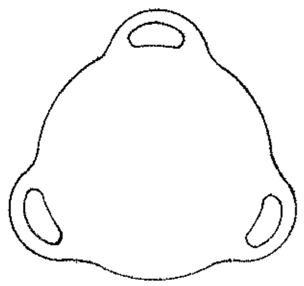


FIG. 23 [1]

l'édifice, apporte une bouffée d'air frais dans ses vénérables couloirs. Il trouvera sa justification, et son expression la plus riche, dans la méthode axiomatique de Hilbert.

1.2. A la section 3 du paragraphe 20, Klein étudie les applications conformes d'une surface fermée sur elle-même. Il fait observer que celles-ci se divisent en deux classes disjointes :

a) celles qui conservent le sens des angles (exemple : rotation d'une sphère autour de son centre) ;

b) celles qui ne le conservent pas (exemple : symétrie d'une sphère par rapport à un plan diamétral).

D'où la définition : une surface est dite symétrique, lorsqu'elle autorise des transformations involutives de la deuxième catégorie. Il appelle encore lignes de passage les lignes dont tous les points sont fixes par de telles transformations. Il peut alors scinder l'ensemble des surfaces en deux grandes classes, celle qui contient les surfaces partagées en deux parties distinctes par une coupure

[1] [*50 b*] t. 3, fig. 14, p. 527.

effectuée le long de toutes les lignes de passage, et celle qui contient les surfaces pour lesquelles cela n'est pas le cas [1].

Ces idées permettent de traiter les surfaces avec ou sans bord, orientables ou non orientables, de la même façon :

« Jusqu'à présent, nous ne considérions que les surfaces à courbure continue, ou éventuellement celles présentant des discontinuités isolées. Ainsi, on pourra se représenter notre surface comme formée par un nombre fini de morceaux, qui se rencontrent sous des angles bien déterminés, c'est-à-dire comme ayant l'aspect d'un polyèdre. Remarquons que les surfaces qui ont un bord sont généralement susceptibles d'une telle interprétation. Il suffit de concevoir ses deux côtés comme une forme polyédrique dont certaines faces se rencontrent sous un angle de 360 degrés [2]. Cette surface est effectivement fermée et symétrique. En effet, si l'on permute les couples de points qui se correspondent dans cette représentation, la surface subit une transformation conforme avec inversion des angles, et les courbes frontières deviennent lignes de passage. Par la même occasion, notre répartition des surfaces en deux classes reçoit une signification importante. Les surfaces ordinaires munies d'une frontière, et sur lesquelles on peut distinguer deux côtés, correspondent visiblement à la première classe. En revanche, à la seconde classe correspondent les surfaces doubles, c'est-à-dire celles pour lesquelles un déplacement continu permet de passer d'un côté à l'autre. Ainsi, les surfaces doubles fermées ne sont pas exclues de nos considérations » [3] [*50 b*, t. 3, p. 569-570].

Enfin, à la page 571, Klein décrit une surface que l'on connaît aujourd'hui sous le nom de bouteille de Klein :

« On peut s'en faire une idée en retroussant un morceau d'un tuyau de caoutchouc, puis en le faisant se pénétrer de façon à réunir le côté extérieur et le côté intérieur » (voir fig. 24, $\lambda = 0$ et $p = 1$).

§ 2. LA THÈSE DE WEICHOLD

Dans sa thèse de doctorat (1883) [*94*], Guido Weichold reprend l'étude des surfaces symétriques dans la perspective topologique, et l'établit sur des bases plus solides. Il éclaircit notamment des passages que Klein n'avait qu'effleurés.

A la fin du paragraphe 1, après avoir rappelé quelques géné-

[1] Par la suite, Klein appellera orthosymétriques les surfaces de la première catégorie, et diasymétriques celles de la seconde.
[2] A ce propos Klein écrit : « Je dois cette interprétation à M. Schwarz (Pâques, 1881) ; elle remonte à M. Schottky. »
[3] Cette manière d'envisager les surfaces avec bord comme des surfaces sans bord particulières s'utilise encore sous la dénomination *Verdoppelung* (voir [*82*], p. 129).

ralités, Weichold expose le plan de la première partie, qui seule nous concerne :

1) Classification topologique des surfaces symétriques ;
2) Recherche des formes normales qui les représentent ;
3) Représentation schématique des formes normales par les domaines fondamentaux.

Weichold fait d'abord remarquer (§ 3), qu'outre la classification d'après le genre et d'après les critères d'orthosymétrie et de diasymétrie (classe de la surface), on peut encore les répartir d'après le nombre de courbes de passage. En effet, pour une surface de genre p, le nombre λ de ces courbes est susceptible de prendre les différentes valeurs :

$\lambda = p + 1, p - 1, p - 3...$ (à l'exclusion de 0) pour les surfaces orthosymétriques ;

$\lambda = p, p - 1, p - 2, \ldots, 2, 1, 0$ pour les surfaces diasymétriques.

La première de ces séries de valeurs avait déjà été indiquée par Neumann [*69 b*, p. 163]. Quant à l'autre, c'est la première fois qu'elle apparaît. Pour une même valeur de p, on distingue donc $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ [1] espèces de surfaces orthosymétriques, et $p + 1$ espèces de surfaces diasymétriques, ce qui donne au total pour un même p :

$$\left[\frac{p+2}{2}\right] + p + 1 = \left[\frac{3p+4}{2}\right].$$

Weichold note cette classification en genre, classe et espèce par $\pm (p, \lambda)$, $+$ et $-$ caractérisant respectivement les surfaces orthosymétriques et diasymétriques, p le genre et λ le nombre de courbes de passage.

L'auteur justifie la classification ainsi définie en démontrant les deux groupes de propositions (§ 4) :

1 *a)* Aucune des deux classes n'est vide ;

1 *b)* Toute surface symétrique appartient à l'une des deux classes ;

2 *a)* Aucune des espèces n'est vide ;

2 *b)* Toute surface symétrique appartient à l'une des différentes espèces.

Après avoir remarqué que deux surfaces symétriques sont équivalentes, au point de vue des applications qu'il envisage, lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par « pliage et collage,

[1] Le crochet signifie « le plus grand entier contenu dans ».

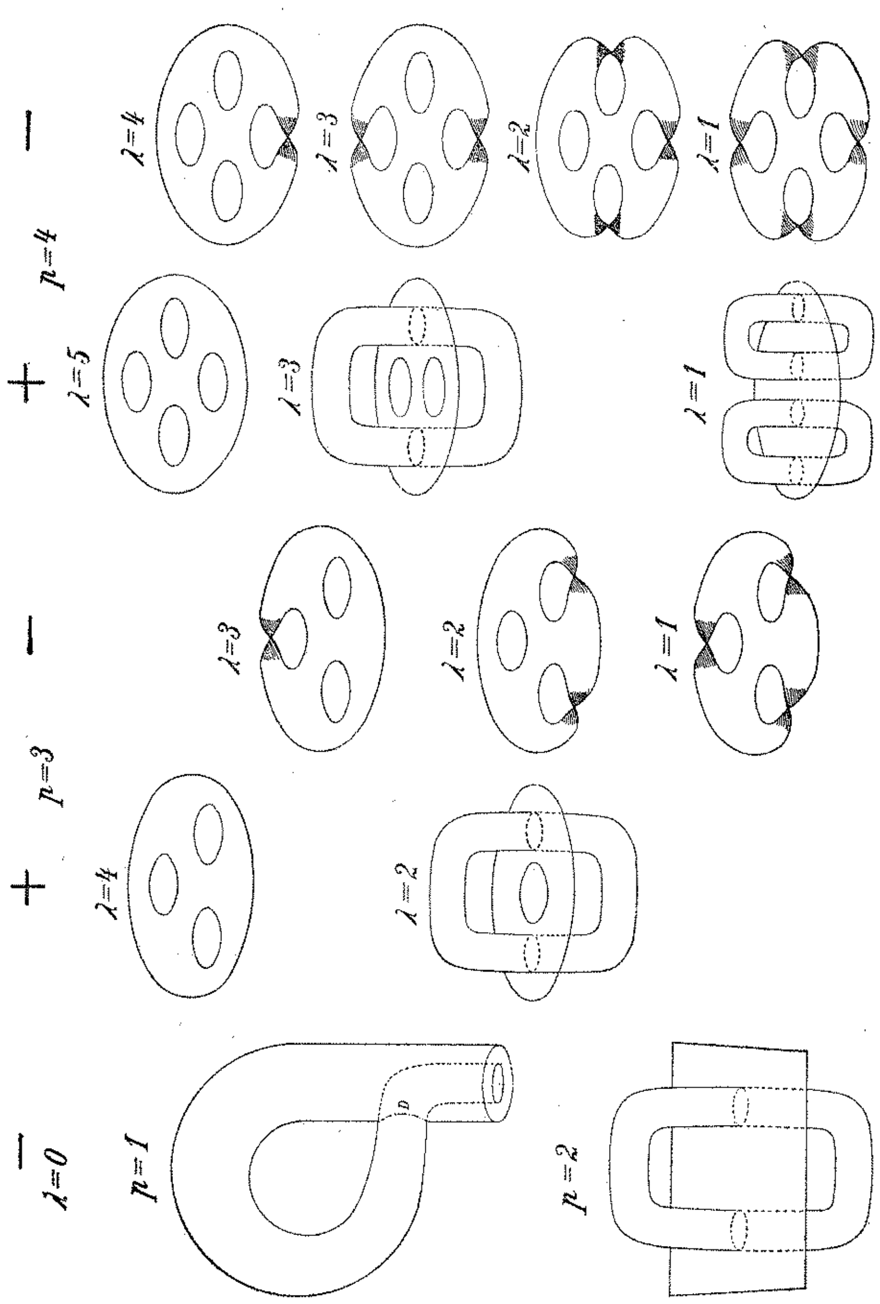


FIG. 24

déchirure et recollage » (1), Weichold se demande s'il n'est pas possible, au moyen de telles transformations, de passer d'une surface d'une classe et d'une espèce déterminée à toutes les surfaces de la même classe et de la même espèce ; cela permettrait de choisir pour chaque type de surface un représentant unique. A cette question, il répond affirmativement, en s'appuyant sur un théorème de Jordan (voir p. 112).

Au paragraphe 3, on trouve des exemples de formes normales. Nous en citerons quelques-uns afin de fixer les idées (voir fig. 24). La surface — (1,0) représente la bouteille de Klein.

En conclusion, nous dirons que le mérite des travaux de Klein et Weichold a été d'introduire les surfaces non orientables dans le courant normal de la recherche topologique, en les considérant comme des surfaces, et non plus comme des curiosités mathématiques ; cela constitue un progrès notable depuis Möbius, qui n'avait pas su greffer l'étude de ses polyèdres sur celle de la corrélation élémentaire. Les résultats de Klein et Weichold ouvrent la voie à Dyck, dont les recherches conféreront à notre science le visage qu'elle aura au moment des premiers travaux de Poincaré.

§ 3. LES CONTRIBUTIONS DE W. VON DYCK

3.1. *Généralités*

Les contributions de Dyck à la topologie sont nombreuses et variées. Avant de les aborder, voyons les raisons qui l'amenèrent à s'occuper de cette science.

Walter von Dyck est né en 1856 à Munich, ville dans laquelle il effectue ses études. A partir de 1875, Klein y détient la chaire de mathématiques ; c'est autour de cette exceptionnelle personnalité que s'ébauche la pensée mathématique de Dyck. En 1879, année où il est nommé assistant de Klein, Dyck publie sa thèse de doctorat [*26 a*], dont le sujet le familiarise avec les théories de Riemann, source de bien des connaissances topologiques de l'époque. En 1880-1881, Dyck suit à Berlin les cours de Kronecker avec qui il a plusieurs conversations, ainsi qu'en témoigne la correspondance entre Klein et Dyck (notamment la lettre nº 535 du 12 mars 1881) (2). C'est là le point de départ des recher-

(1) Avec toutefois des conditions supplémentaires concernant les points symétriques et le nombre de courbes de passage.

(2) Les lettres de Dyck à Klein sont conservées à la Bibliothèque Universitaire de Göttingen. Il ne nous a malheureusement pas été possible de retrouver les réponses de Klein, pas plus d'ailleurs que le reste des archives de Dyck.

ches de Dyck sur la relation entre le nombre fondamental (*Grundzahl* de Neumann) et la caractéristique de Kronecker, qui sont à l'origine de ses travaux topologiques. De 1881 à 1884, date à laquelle il est nommé professeur extraordinaire à l'Ecole Polytechnique de Munich, Dyck continue à occuper la fonction d'assistant de Klein, mais à Leipzig cette fois-ci. Au cours de ce séjour, il étudie les mémoires de Möbius, autre source d'inspiration pour sa topologie.

3.2. *Premiers travaux topologiques*

C'est en 1884, à l'occasion du congrès que tient à Montréal la « British Association for the Advancement of Science », que Dyck fait sa première communication topologique : *Sur l'*analysis situs *des espaces à trois dimensions* [*26 b*]. Cette communication, qui compte à peine quelques lignes, a passé totalement inaperçue. Dyck commence par poser le problème en ces termes :

« L'objet de ces considérations est de déterminer des nombres caractérisant les espaces fermés à trois dimensions, au point de vue des possibilités de correspondances géométriques biunivoques [1] ; ces nombres seront les analogues de ceux introduits par Riemann dans la théorie de ses surfaces. »

Et il poursuit :

« Supposons que chaque partie de l'espace envisagé se comporte comme notre espace euclidien habituel, avec cette restriction que tous les points infiniment éloignés sont regardés comme condensés en un seul point (espace des rayons réciproques). Choisissant un représentant parmi tous les espaces entre lesquels une correspondance biunivoque est possible, le procédé suivant permet de former tous les espaces tridimensionnels : on extrait de notre espace $2k$ parties limitées par des surfaces fermées groupées par paires, de genres respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_k$; on ferme l'espace ainsi construit en établissant des correspondances biunivoques entre chaque paire de surfaces. Les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_k$ des différentes surfaces et le type de correspondance choisi forment ce que nous appellerons la caractéristique distinctive de notre espace. Cette caractéristique est déterminée par :

1) L'existence de surfaces fermées, qui ne limitent pas de partie de l'espace ;

2) L'existence de courbes fermées de notre espace qui ne peuvent, ni se transformer l'une dans l'autre, ni se réduire à un point.

« Considérons encore cette deuxième caractéristique qui, à ma connaissance, n'a jamais été discutée. Prenons deux anneaux extraits

(1) *One-one.*

de l'espace ordinaire ; selon le type de correspondance biunivoque envisagé, on obtient des espaces essentiellement différents. Ainsi, on peut d'abord faire en sorte qu'un méridien de la première corresponde à un parallèle de la seconde. Il existe alors des courbes qui ne peuvent se réduire à un point... Au contraire, si nous supposons qu'à un méridien de la première corresponde un parallèle de la seconde, et *vice versa*, une telle situation ne pourra plus se présenter... J'espère revenir sur ce sujet à une autre occasion. »

On ne doit pas se laisser tromper par le caractère laconique de ce très court article. Il renferme des idées remarquablement claires et nouvelles, sur un problème jamais encore envisagé. On relèvera plus particulièrement les quatre points suivants :

1) Présentation précise du problème fondamental de la topologie des espaces à trois dimensions [1] ;

2) Enoncé d'un important théorème sur le mode de construction des espaces à trois dimensions. On notera que Dyck n'étudie que des espaces qui remplissent la condition d'homogénéité [2] (voir p. 73) ;

3) Mise en évidence du fait qu'un même système de paires de surfaces peut engendrer des espaces essentiellement différents, selon le mode d'identification. Les nombres p_i ne suffisent dès lors pas à caractériser les espaces à trois dimensions, au point de vue topologique ;

4) Utilisation de la réductibilité des lignes tracées dans un espace comme moyen complémentaire de classification. C'est là une idée neuve et grosse de possibilités. En topologie des surfaces, on avait déjà traité de cette question (voir p. 114-116), mais dans un autre contexte : les critères de réductibilité des courbes tracées sur des surfaces n'y sont pas utilisés pour établir une classification de ces surfaces, mais se déduisent au contraire de cette classification.

Bien que la recherche des formes fondamentales, qui permettraient d'établir une classification des espaces à trois, respectivement à n, dimensions, l'ait occupé de nombreuses années durant, et malgré les promesses qui terminent la communication de Montréal, Dyck ne reviendra plus sur cette question. A ce sujet, il est intéressant de citer quelques passages de sa correspondance avec Klein.

(1) Dyck ne parle pas de la continuité de la correspondance ; elle était probablement sous-entendue. A la même époque, il utilise, à propos de ce problème, l'expression « univoque et continue » (voir p. 134).

(2) Par la suite, Dyck appelle « régulier » un espace qui remplit cette condition.

1) Dans une lettre datée du 27 février 1884 (lettre nº 561), Dyck écrit :

« Les recherches sur la connexion des espaces fermés à trois dimensions sont encore compliquées par le fait qu'il existe des surfaces partageant l'espace en parties, qui ne possèdent pas la même connexion. Cela n'est toutefois possible que pour les surfaces enlacées... Ainsi, dans le cas d'un tore noué (voir fig. 25), on ne peut pas établir une correspondance *univoque-continue* entre l'extérieur et l'intérieur. »

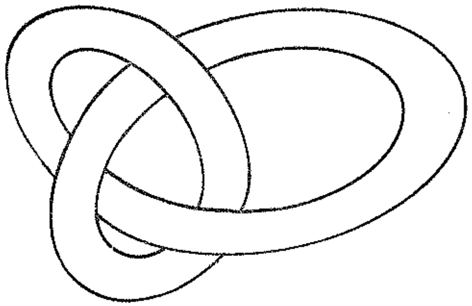


FIG. 25

2) Dans une lettre du 30 septembre 1885 (nº 597), on peut lire :

« L'*analysis situs* dans les espaces à trois dimensions cloche encore... De toute façon, les dimensions paires et impaires jouent, ici encore [1], un rôle particulier. »

3) La lettre du 1er avril 1888 (nº 626) est assez optimiste :

« Je pense que le prochain article *Variétés à trois dimensions* n'offre plus de difficultés de principes. »

Le contexte ne nous permet pas de déterminer ce qui incite Dyck à croire qu'il approche de la solution.

4) Le 31 décembre de la même année (nº 642), le monstre n'est toujours pas vaincu et la situation paraît s'embrouiller :

« Dans mon travail, il reste encore une difficulté à surmonter. Il s'agit de la question des formes fondamentales pour les espaces à trois dimensions, dont les combinaisons convenables permettent d'obtenir tous les R_3. Ici les possibilités sont plus nombreuses que dans le cas de R_2.

[1] Cette remarque est en relation avec un théorème, que Dyck signale sans énoncer.

Il faut rechercher de combien de manières, essentiellement différentes, on doit faire se correspondre les surfaces (frontières de R_3) pour la construction de R_3. Des surfaces de caractéristique différente peuvent conduire au même R_3. »

5) Le 9 mai 1890 (nº 679), Dyck annonce sa décision d'abandonner ce problème :

« Je me suis décidé à faire paraître la deuxième partie de mon *analysis situs* dans les *Annales*... Ce travail est assez long et contient quelques questions qui n'ont encore pas été étudiées. Cependant, d'un autre côté, il me paraît de moins en moins possible de résoudre la question concernant les formes normales des espaces à n dimensions, problème pour lequel j'avais précisément retardé la publication de mon travail. Je pensais d'abord réussir dans le cas de $n = 3$, que j'aurais traité dans un troisième article. Je me suis cependant décidé à quitter ce thème. »

3.3. *Les Contributions*

3.3.1. *Généralités.* — Entre 1885 et 1887, Dyck publie trois courts mémoires [*26 c*], qui contiennent déjà les idées principales de ses grands articles de 1888 et 1890 [*26 d* et *e*] que nous allons maintenant examiner.

Il nous faut tenter de faire ressortir les traits les plus frappants de cette œuvre, ceux qui lui confèrent un intérêt pour l'histoire de notre science. Pour la clarté de l'exposé, nous fractionnerons le travail de Dyck en un certain nombre de parties plus ou moins distinctes les unes des autres ; en voici le plan :

1 *a)* Variétés à une dimension. Caractéristique ;
1 *b)* Variétés à deux dimensions. Caractéristique ;
2 *a)* Invariance de la caractéristique. Formes normales ;
2 *b)* Surfaces à indicatrices non inversables. Propriétés générales ;
2 *c)* Surfaces à indicatrices inversables ;
2 *d)* Relation entre l'ordre de connexion de Riemann et la caractéristique ;
3 *a)* Variétés à n dimensions ;
3 *b)* Caractéristique et propriétés ;
3 *c)* Variétés sphériques et projectives ;
4 Application aux variétés définies analytiquement.

Tirant les leçons des découvertes de Cantor, Dyck commence par fixer les limites de son étude :

« Par propriétés absolues, on entend les propriétés dont la coïncidence est nécessaire et suffisante pour une correspondance biunivoque et bicontinue entre *tous* les éléments de deux variétés » [*26 b*, p. 157].

En relation avec cette phrase, Dyck ajoute :

« Précisons qu'il s'agit ici de correspondances continues entre variétés continues, c'est-à-dire de correspondances telles que des éléments voisins se transforment en éléments voisins. Les correspondances qui, à l'image de celles de Cantor-Lüroth, appliquent des variétés de dimensions différentes les unes sur les autres sont exclues comme discontinues. »

Quittons cette introduction, pour nous consacrer au corps de l'œuvre.

3.3.2. *Les variétés à une dimension et leur caractéristique.* — Dyck considère les variétés les plus générales comme engendrées par des variétés élémentaires E^1, elles-mêmes définies d'une manière précise. Ce mode de génération, fort original, permet à son auteur d'aborder le nombre fondamental sous un angle nouveau et riche de possibilités.

On obtient la variété à une dimension la plus générale M^1 en réunissant, par leurs extrémités, un nombre fini ou infini de portions de courbes limitées par deux points ; celles-ci sont regardées comme des domaines élémentaires. Ces variétés contiennent donc, outre un certain nombre de variétés élémentaires, des courbes fermées ou cycles (§ 1, 1re partie).

Par définition, Dyck attribue aux variétés élémentaires le nombre caractéristique K^1 égal à 1. Dès lors, si l'on pense à la construction de M^1, l'introduction, respectivement la suppression, d'un E^1, apportera à la caractéristique une contribution de 1, respectivement de — 1. C'est ainsi que la séparation d'un E^1 au moyen d'un point augmentera la caractéristique de 1, et que la réunion de deux extrémités d'un E^1 la diminuera de 1. Pour la caractéristique d'une courbe fermée, on aura donc : $1 - 1 = 0$. Quant à la caractéristique d'un M^1, elle est égale au nombre de E^1 qui la composent (§ 2).

Cette façon d'envisager l'étude des variétés peut surprendre, surtout dans le contexte historique. Néanmoins, elle se justifie parfaitement dès que l'on considère les points suivants :

1) Alors qu'auparavant, l'étude des variétés se faisait par voie analytique, c'est-à-dire en procédant du compliqué au simple, Dyck aborde ce sujet par une méthode synthétique, en considérant les variétés élémentaires comme engendrant des variétés quelconques ;

2) De cette manière, la caractéristique d'un ensemble disjoint de variétés s'avère immédiatement être la somme des caractéristiques des variétés qui la constituent ; ce n'était pas le cas du nombre fondamental sous la forme que lui avait donnée Neumann ;

3) Une telle définition s'étend sans autre aux espaces à n dimensions.

3.3.3. *Les variétés à deux dimensions et leur caractéristique.* — La question se traite formellement de la même façon que dans le cas de M^1 : un domaine élémentaire E^2 est une portion de surface applicable sur un plan, dont le contour est une courbe fermée ne se recoupant pas elle-même. La variété M^2 la plus générale se définit comme la réunion, par paires, d'un nombre fini ou infini de E^2, qui se fait soit le long de certaines portions de frontières, soit le long de courbes fermées. Dyck exige, de plus, que le voisinage de chacun de ses points soit un domaine élémentaire [1]. Il n'est pas nécessaire — signale-t-il ensuite — d'effectuer réellement de telles réunions ; il suffit de les fixer au moyen de correspondances, indiquées par une table (§ 1, 2e partie). Dans le même paragraphe, l'auteur fait la distinction entre surfaces à indicatrices inversables et surfaces à indicatrices non inversables [2]. Sont du premier type, les surfaces sur lesquelles il est possible de déplacer l'indicatrice de Klein (voir p. 124) de telle sorte que son sens s'inverse, après qu'elle a effectué un tour complet de la surface.

Cette définition appelle quelques remarques. Dans une note au bas de la page 474, Dyck écrit :

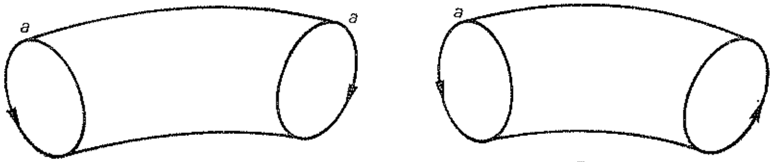
« Je donne volontairement la définition de Klein, qui considère la propriété en question comme une propriété de la surface, c'est-à-dire indépendante de l'environnement. J'évite ainsi la dénomination usuelle de surface à un côté, respectivement à deux côtés, qui découle de ce que sur une surface à i.i., il est possible de passer d'un côté à l'autre, ce qui n'est pas possible dans le cas des surfaces à i.n.i. *Cette dernière propriété, qui n'est* — comme je le montrerai à une autre occasion — *qu'une propriété d'immersion* [3] *de la surface dans notre espace tridimensionnel, n'entre plus en considération lorsque l'on fait abstraction de la position de la surface.* »

Malgré sa promesse, Dyck n'est plus revenu sur ce point. Une lettre à Klein du 26 juin 1877 (nº 614) nous permet cependant

(1) On reconnaît la condition d'homogénéité.
(2) Nous écrirons dorénavant i.i. pour les premières et i.n.i. pour les secondes.
(3) *Lageeigenschaft.*

de nous faire une idée plus précise de sa position à l'égard de ce problème :

« Il s'agit de la caractéristique des variétés à i.i. On a le théorème suivant : la propriété, pour une variété, d'avoir une indicatrice inversable se conserve (c'est bien connu) dans quelque espace qu'on la place. En revanche, la propriété pour une variété M_n d'être à un ou à deux côtés dans M_{n+1} n'appartient pas, en général, en propre à M_n, mais dépend de M_{n+1}. Ainsi par exemple, la surface annulaire habituelle à deux bords est une surface à i.n.i. Cette surface possède la propriété, dans notre espace R_3, d'avoir deux côtés ; et cela n'est pas le cas dans chaque R_3. De même, la surface double de Möbius est à un côté dans notre espace R_3, mais pas dans chaque R_3. Pour le montrer on construit un espace en forme d'anneau, que l'on obtient en réunissant, d'une façon ou de l'autre, les deux surfaces frontières d'un cylindre :



$R_{3,\text{I}}$ $R_{3,\text{II}}$

FIG. 26

« $R_{3,\text{I}}$ est un espace ordinaire limité par un anneau. $R_{3,\text{II}}$ est un espace double (à i.i.) limité par une surface double. On place ensuite la bande $ABCD$ dans $R_{3,\text{I}}$, respectivement dans $R_{3,\text{II}}$, de telle manière que AB vienne en CD. On obtient alors, dans le cas $R_{3,\text{I}}$, la surface cylindrique ordinaire, qui est à deux côtés ; dans le cas $R_{3,\text{II}}$, on obtient également la surface cylindrique ordinaire, mais elle est à un côté.

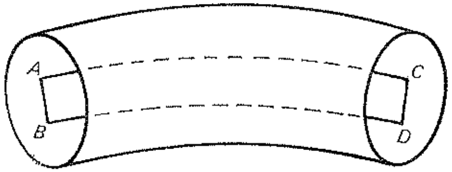


FIG. 27

« Refaisons la même construction avec le ruban de Möbius. Dans les deux cas, on aboutit à une surface à i.i., celle située dans $R_{3,\text{I}}$ étant à un côté, et celle située dans $R_{3,\text{II}}$ à deux côtés. D'une façon analogue, on peut construire des surfaces fermées qui sont à un ou à deux côtés, selon l'espace dans lequel elles sont plongées. »

A ce sujet, Steinitz écrit [*87 b*, p. 35] :

« L'oubli de cette distinction est la source d'une erreur qui se répercute à travers presque toute la littérature... »

Il observe aussi que, depuis Dyck, dont le travail est bien connu, personne ne s'est occupé de la question.

La caractéristique K^2 de E^2 étant posée égale à 1, il suffit, pour déterminer celle de M^2, d'analyser les effets des différents

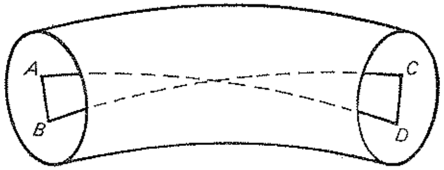


FIG. 28

procédés qui transforment un ensemble de E^2 en M^2. On a alors les quatre propositions :

1) Toute ponctuation diminue la caractéristique d'une unité ;

2) La suppression d'un M^1 de caractéristique K^1 augmente K^2 de K^1 ;

3) La suppression d'une portion M^2_α, de caractéristique K^2_α, diminue K^2 de K^2_α lorsqu'elle a lieu sans l'aide de sections transverses. Dans le cas contraire, K^2 varie dans le sens indiqué par le théorème 2 ;

4) Une rétrosection n'altère pas la valeur de K^2.

Dyck remarque encore que l'identification de deux portions d'une variété élémentaire donne soit une variété à un contour (surface à i.i.), soit une variété à deux contours (surface à i.n.i.).

3.3.4. *Invariance de la caractéristique. Formes normales.* — On doit ensuite établir que cette caractéristique ne dépend pas du mode de génération utilisé. Dyck y parvient en montrant que les processus de transformations introduits plus haut permettent de définir la caractéristique à partir d'une variété quelconque, par le biais des formes primitives de Möbius, dont il donne la définition suivante : une surface est primitive si et seulement si toute rétrosection la partage en deux surfaces disjointes. Concrètement, celles-ci s'obtiennent en perçant dans une variété élémentaire un certain nombre de trous (n). On peut donc écrire, d'après le théorème : $K^2 = l - n = 2 - r$ (r étant égal au nombre de courbes frontières). Puis Dyck passe des formes primitives aux formes normales (1), toujours selon la méthode de Möbius, par identification de certaines courbes frontières. Ainsi par exemple, le tore se construit à partir de la forme à une ouverture par identification des deux courbes frontières. L'élément central de cette théorie, selon le point de vue envisagé ici, est contenu dans le théorème suivant : les courbes qui sont identifiées apparaissent sur la surface comme rétrosections. En vertu du théorème 4, cette surface a la même caractéristique que la forme primitive qui l'a engendrée. Le tore de l'exemple précédent a donc une caractéristique égale à 0. Quant à la sphère, on l'obtient par la réunion de deux variétés élémentaires, et sa caractéristique vaut 2.

3.3.5. *Surfaces à indicatrices non inversables. Propriétés générales.* — On est ainsi conduit à la définition fondamentale :

« La caractéristique d'une surface connexe à i.n.i. est donnée par l'équation $K^2 = 2 - r - 2s$ (1), dans laquelle r est le nombre de courbes frontières, et s le nombre de rétrosections qui transforment la surface en une forme primitive. »

Par le pouvoir de la définition citée plus haut, s est également le nombre maximal de rétrosections disjointes qui ne partagent pas la surface. Un tel système de coupures portera le nom de système complet.

Pour préciser la relation entre le nombre K^2 et le nombre défini par Riemann, il est nécessaire de déterminer le nombre de sections transverses qu'il faut, outre les rétrosections, pour transformer la surface donnée en une surface élémentaire. C'est à cette question que Dyck consacre la fin de la première partie du paragraphe 3 (p. 478). Soit F la surface donnée, caractérisée par les nombres r et s ; les s rétrosections la transforment alors en une forme primitive ayant $2s + r$ courbes frontières. Pour l'amener à l'état de variété élémentaire, on doit par conséquent lui faire subir $2s + r - 1$ sections transverses, parmi lesquelles nous pouvons en choisir s qui relient un point d'une courbe à son homologue sur la courbe correspondante. Le système de sections et de rétrosections introduit est le système canonique, et l'on a l'intéressante proposition :

« Le nombre de rétrosections nécessaires à un système canonique est constant et vaut le double du nombre de rétrosections disjointes que l'on peut construire sur la surface sans la morceler. »

(1) Il admet sans plus que toutes les surfaces fermées peuvent se réduire à ces formes normales, ce qui est loin d'être évident.

Dyck énonce encore les théorèmes suivants : « Une surface à i.n.i. de caractéristique K^2 peut posséder $(2 - K^2)$, $(2 - K^2 - 2)$, . . . , 2, 0 courbes frontières » et plus loin : « Les surfaces closes à i.n.i. ont une caractéristique paire. »

Nous verrons en 3.3.7 comment ces considérations mènent vers la relation annoncée au début de cet alinéa.

3.3.6. *Surfaces à indicatrices inversables. Propriétés générales.* — Les raisonnements que nous venons d'expliciter s'étendent facilement aux surfaces de ce nouveau type :

« Pour la construction des formes primitives des surfaces à i.i., on s'appuie sur la proposition suivante :

« Lorsqu'on ferme une ouverture d'une forme primitive, ouverture que pour simplifier nous supposerons circulaire, en identifiant les points diamétralement opposés, on obtient une surface à i.i. sur laquelle tout cercle, dont les points sont identifiés, apparaît comme rétrosection le long de laquelle l'indicatrice s'inverse.

« Au cours de ce processus, le nombre de courbes frontières a diminué d'une unité, alors qu'en revanche, d'après le principe exposé à la page 475 (1), la caractéristique n'a pas varié.

« On se persuadera aisément de la justesse de cet énoncé en sectionnant un ruban de Möbius le long d'une ligne médiane. Il se transforme alors en une surface à deux bords à i.n.i., les points de l'un des bords s'identifiant diamétralement.

« En effectuant le même travail avec plusieurs frontières d'une forme primitive, on obtient les formes normales pour les surfaces à i.i. et l'équation de définition pour la caractéristique : $K^2 = 2 - r - s'$ (2), où r est le nombre de courbes frontières, s' le nombre de rétrosections disjointes qui ne morcellent pas la surface et le long desquelles l'indicatrice s'inverse. »

Dyck donne ensuite deux autres modes de construction des surfaces à i.i., en partant des formes primitives :

1) On identifie normalement (c'est-à-dire comme dans le cas des surfaces à i.n.i.) un certain nombre de paires de frontières, disons 2σ, tandis que l'on identifie diamétralement les σ' courbes restantes. Puis on montre que sur cette surface il existe un système de $s' = 2\sigma + \sigma'$ rétrosections disjointes qui tiennent le rôle des rétrosections figurant dans l'équation de définition ; c'est-à-dire que cette surface peut être construite en identifiant diamétralement $s' = 2\sigma + \sigma'$ courbes.

« La figure 3 (2) montre une surface dans laquelle les points de A sont à identifier diamétralement (1, 1' ; 2, 2' ; 3, 3'), pendant que les

(1) Voir plus haut, p. 139.
(2) Figure 29.

points des courbes B et C s'identifient de telle façon que a, a' ; b, b' ; c, c' se correspondent. Les courbes L, M [1] qui passent respectivement par 1 (1′), a (a') ; 2 (2′), b (b') et 3 (3′) sont les nouvelles courbes le long desquelles l'indicatrice s'inverse. Elles forment ensemble un système de rétrosections disjointes, ne morcelant pas la surface, qui remplace complètement le système précédent, et dont toutes les lignes s'identifient diamétralement. »

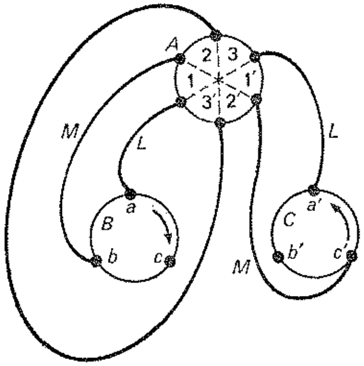


Fig. 29

2) La figure 30 montre une troisième manière de construire les surfaces à i.i. On identifie les points des deux courbes A et B, mais dans le sens contraire, comme cela est indiqué par les points (a, a' ; b, b' ; c, c'). On trouve une surface à i.i. Comme précédemment, les courbes L et M [2] sont susceptibles de remplacer les courbes A et B, et constituent un système de rétrosections disjointes dont les points s'identifient diamétralement.

En conséquence de l'équation de définition, Dyck énonce quelques propositions qui font apparaître des différences essen-

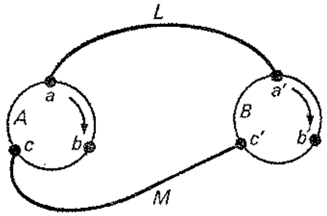


Fig. 30

[1] L et M remplacent ici la malencontreuse notation de Dyck.
[2] *Ibid.*

tielles entre surfaces à i.i. et à i.n.i. Tout d'abord, dans les variétés à i.i., le nombre de courbes frontières peut prendre les valeurs $(2 - K - 1, 2 - K - 2, \ldots, 2, 1, 0)$, proposition que Weichold avait déjà énoncée, quoique dans une autre terminologie. Si la surface est fermée, ce nombre peut être tant pair qu'impair. L'auteur examine ensuite comment se comportent les notions de système complet et de système canonique lorsqu'on les applique aux surfaces à i.i. :

1) Sur une surface à i.i., un système complet de rétrosections est décomposable, dans le cas le plus général, en σ' rétrosections le long desquelles l'indicatrice s'inverse, et en $\sigma + \sigma'$ rétrosections le long desquelles l'indicatrice ne s'inverse pas ; σ d'entre elles seront identifiées dans le même sens, et σ'' seront identifiées dans le sens contraire. On a dès lors $K^2 = 2 - r - \sigma' - 2(\sigma + \sigma'')$, et la plus petite valeur de σ' est 0 ou 1, selon que $r + K^2$ est pair ou impair. On en déduit que le nombre d'éléments d'un système complet prend la valeur minimale $\dfrac{2 - r - K^2}{2}$, respectivement $\dfrac{3 - r - K^2}{2}$ lorsque $\sigma' = 0$, respectivement 1 ; la valeur maximale $2 - r - K^2$ est atteinte lorsque $\sigma = 0$, $\sigma'' = 0$. Ainsi, ce nombre, qui était constant dans le cas des surfaces à i.n.i., varie entre les deux limites fixées lorsque les surfaces sont à i.i., selon les choix des sections.

2) Une fois pratiquées les s' rétrosections, la surface a $r + s' = r + \sigma' + 2\sigma + 2\sigma''$ courbes frontières, et il faut $r + s' - 1$ sections transverses pour en faire une variété élémentaire. Celles-ci peuvent visiblement être choisies de sorte que $\sigma + \sigma''$ d'entre elles apparaissent comme rétrosections sur la surface primitive ; on a au total $\sigma' + 2\sigma + 2\sigma''$ rétrosections, parmi lesquelles σ' sont isolées, tandis que les $2\sigma + 2\sigma''$ restantes se coupent deux à deux. On est conduit à la proposition : le nombre de courbes d'un système canonique est constant et égal à la valeur maximale du nombre de rétrosections qui ne morcellent pas la surface et qui ne se recoupent pas elles-mêmes.

Dyck étudie ensuite un certain nombre de cas correspondant à différentes valeurs de K^2 (voir les fig. 31 et s.).

Puis il remarque que

« dans notre espace, les surfaces fermées à i.i. ne sont pas réalisables sans l'intermédiaire de lignes doubles » [1].

[1] Cette question sera traitée quelques années plus tard par W. Boy [*9*].

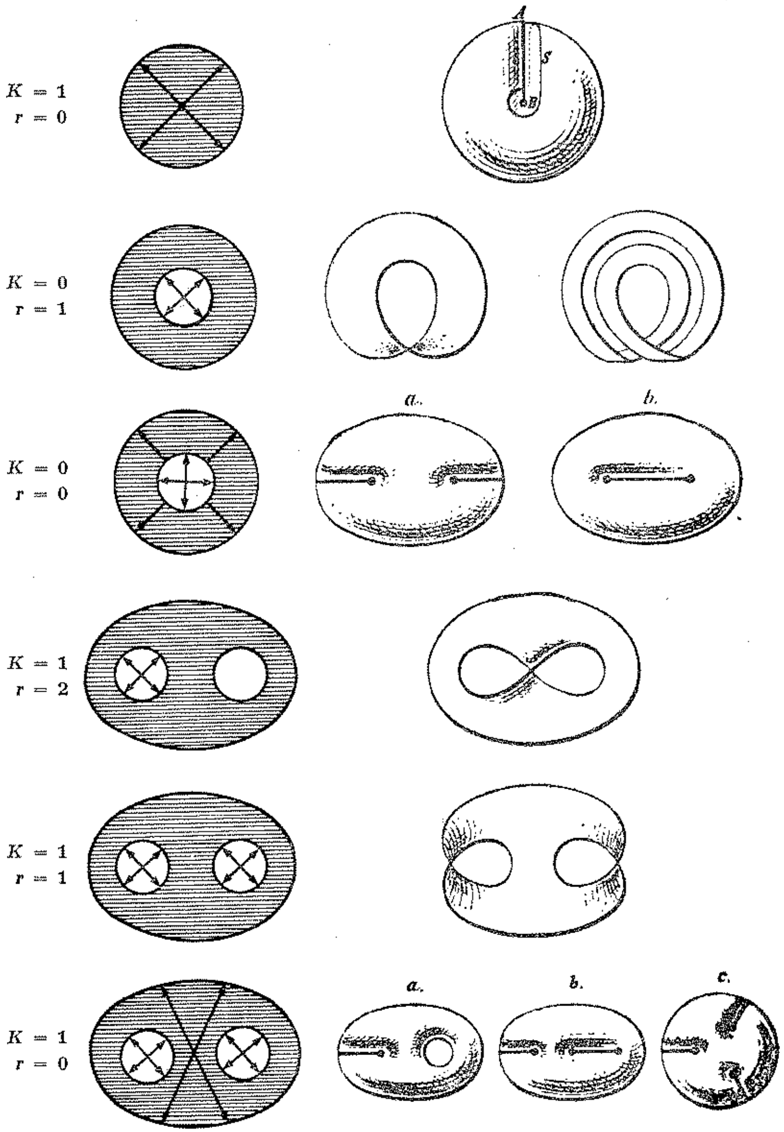


FIG. 31

Dyck termine ce paragraphe en observant que le plan projectif est une surface à i.i. ; on l'obtient en identifiant diamétralement les points d'un disque (voir p. 144, $K = 1$ et $r = 0$).

Au paragraphe 5 [1], Dyck énonce, sans démonstration, quelques propositions foncièrement nouvelles pour notre discipline [2] :

1) Les surfaces fermées dont la caractéristique est impaire sont toujours à i.i. En revanche, lorsque la caractéristique d'une surface fermée est paire, on ne peut pas dire si elle est à i.i. ou à i.n.i..

2) Sont toujours à i.i. les surfaces qui :

a) ont une caractéristique paire et un nombre impair de frontières ;

b) ont une caractéristique impaire et un nombre pair de frontières.

Donc, la caractéristique seule n'est déterminante pour l'appartenance d'une surface au type i.i. que si elle est impaire, et si la surface est fermée. On démontre aisément ces propositions à partir des relations (1) et (2) (p. 140-141).

3.3.7. *Relation entre la caractéristique et l'ordre de connexion.* — Dyck examine (§ 4) la relation qui existe entre sa caractéristique et le nombre défini par Riemann et revu par Neumann, Schläfli et Klein.

Si l'on appelle Z l'ordre de connexion de Riemann, et $\overline{Z}$ l'ordre de connexion extraordinaire ($Z = \overline{Z}$ pour les surfaces qui ont une frontière, et $\overline{Z} = Z - 1$ pour les surfaces closes), on arrive à la relation $K^2 = 2 - \overline{Z}$, pour les surfaces à i.n.i.

Si le système envisagé est formé de n parties disjointes, on a $K^2 = \sum_{i=1}^{n} K_i^2$, tandis que le nombre fondamental de Neumann, G, est donné par $G = \sum_{i=1}^{n} Z_i + 2 - 2n$.

En ce qui concerne les surfaces à i.i., Dyck remarque ce qui suit :

« Les considérations précédentes s'étendent sans autre aux surfaces à i.i., si on les considère, à l'instar de Schläfli, comme des surfaces

(1) Le paragraphe 5 se rattache naturellement aux questions que nous venons de traiter ; aussi l'étudierons-nous avant le paragraphe 4.

(2) La transcription de ces théorèmes dans le langage de Riemann se fait sans difficulté avec l'aide des résultats du paragraphe suivant.

doublement recouvertes, de manière que les feuillets se rencontrent le long des courbes pour lesquelles l'indicatrice s'inverse. Dans cette perspective, le nombre K^2 prend la forme $K^2 = 2 - \frac{\bar{Z}}{2}$. »

Pour fixer les idées, nous appliquerons ces différentes relations à deux exemples :

1) $K^2 = -2$ et $r = 2$; d'après (2) (p. 141), on a $2s = 2 - r - K^2$, ou $s = 1$. Le nombre de sections transverses vaut $2s + r - 1 = 3$, et la surface est quadruplement connexe, d'après la terminologie de Riemann.

2) $K^2 = -2$ et $r = 1$:

Nombre de Riemann : $r + \sigma' + 2(\sigma + \sigma'')$, et comme ici on peut prendre $\sigma' = 0$ (voir alinéa 1, p. 141) :

$$-2 = 2 - 1 - 1 - 2(\sigma + \sigma'')$$

ou

$$r + \sigma' + 2(\sigma + \sigma'') = 4.$$

Si l'on admet qu'il s'agit d'une surface doublement recouverte :

$$\bar{Z} = 2.4 = 8.$$

Pour terminer, il indique les deux expressions suivantes, qui définissent le genre d'une surface en fonction de K^2 :

1) $p = \dfrac{2 - K^2}{2}$ pour une surface à i.n.i., et

2) $p = 1 - K^2$ pour une surface à i.i.

Sur une surface polyédrale, on appelle caractéristique d'Euler l'expression :

$$N' = \alpha^0 - \alpha^1 + \alpha^2.$$

Si la surface est munie de h anses, on a

$$N' = 2 - 2h$$

(voir par exemple [*82*], p. 140).
Or, d'après Dyck :

$$h = \frac{2 - K^2}{2} = \frac{2 - 2 + Z}{2} = \frac{Z}{2}$$

c'est-à-dire :

$$Z = 2h$$

Dès lors :

$$N' = \alpha^0 - \alpha^1 + \alpha^2 = 2 - 2h = 2 - \bar{Z} = K^2.$$

C'est au cinquième paragraphe de ce chapitre que l'on rencontre, pour la première fois, la définition exacte de ce que l'on nomme aujourd'hui une transformation topologique :

« ... de ce tableau, nous pouvons encore tirer quelques conséquences qui montrent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe entre deux surfaces une *correspondance biunivoque et bicontinue* » [1].

3.3.8. *Variétés à* n *dimensions* [*26 e*].

1. *Définition.* — En guise d'introduction, Dyck observe que, lorsque l'on prend $n > 3$, il faut bien sûr se passer de l'intuition spatiale ; cela oblige à définir les variétés de ce type d'une façon analytique, tout en se laissant guider par les analogies avec les cas $n = 1, 2, 3$.

« Nous partirons de variétés formées par les systèmes de valeurs (points) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, les x_i représentant n variables réelles, indépendantes et bornées. Le voisinage de chacun de leurs points $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ est caractérisé par l'inéquation $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_i)^2 < r^2$; on l'appelle variété élémentaire à n dimensions E_n.

« Plus généralement, nous appellerons variété élémentaire à n dimensions tout système de valeurs (x_i) qui peut être mis en correspondance *biunivoque et bicontinue* [2] avec la variété E_n... L'inéquation :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1$$

représente évidemment une variété de ce type, dont :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$

est la frontière, que nous nommerons variété sphérique à $n - 1$ dimensions S_{n-1}. La frontière de tout autre E_n peut alors être mise en correspondance biunivoque et bicontinue avec S_{n-1} » [*26 e*, p. 277-278].

A la fin de ce paragraphe, Dyck précise que seules seront prises en considération les variétés régulières [3], c'est-à-dire celles dont le voisinage de chaque point est une variété élémentaire, dotée d'une frontière régulière.

2. *La caractéristique et ses propriétés.* — Dyck enseigne (§ 2) comment les variétés les plus générales M_n s'obtiennent à partir de E_n par morcellements et par réunions, opérations qui s'effectuent le long de variétés E_χ. Elles seront représentées par $\mp E_\chi$, et la variété M_n ainsi construite aura pour équation symbolique

(1) C'est nous qui soulignons.
(2) *Ibid.*
(3) Voir n. 2, p. 133.

$M_n = E_n + \Sigma\,(\mp E_\chi)$, où χ peut prendre toutes les valeurs de 0 à $n-1$. Il ajoute :

« L'adjonction, respectivement la suppression, d'une variété E_χ de M_n se fera de façon que la frontière $S_{\chi-1}$ de E_χ appartienne en entier à la frontière de M_n. Nous dirons alors que ces transformations ont été effectuées d'une manière canonique. »

Ces considérations permettent d'introduire deux règles :
1) A toute variété E_n on attribue la caractéristique $+1$;
2) Toute transformation de M_n qui entraîne l'apparition, respectivement la disparition, d'un E_n fera augmenter, respectivement diminuer, la caractéristique d'une unité.

Dyck applique ensuite ces résultats à l'opération qui consiste à diviser E_n en deux parties :

« La méthode la plus simple pour atteindre ce but consiste à partager $E_n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1$ au moyen de $E_{n-1} : x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < 1$ $x_n = 0$, ce qui nous donne deux variétés élémentaires :

a) $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1$ et $x_n < 0$
b) $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1$ et $x_n > 0$.

« Comme, d'autre part, la frontière de E_{n-1} appartient en totalité à celle de E_n, on peut écrire l'équation symbolique :

$$E_n - E_{n-1} = 2E_n,$$

d'où l'on tire que le procédé $+E_{n-1}$ compte pour -1, et inversement $-E_{n-1}$ pour $+1$. En répétant le même raisonnement avec E_{n-1}, il vient :

$$E_n - E_{n-2} - 2E_{n-1} = 2E_n,$$

et $\mp E_{n-2}$ compte pour ∓ 1.
« Plus généralement, on écrit :

$$E_n - E_\chi - 2E_{\chi+1} - \ldots - 2E_{n-1} = 2E_n,$$

ce qui revient à dire que la transformation $\mp E_\chi$ compte pour $\mp(-1)^{n-\chi}$ dans le calcul de la caractéristique de M_n. En conclusion, on a la proposition : la suppression de E_χ dans une variété M_n (n pair) compte pour ∓ 1 selon que χ est pair ou impair. La suppression de E_χ d'une variété M_n (n impair) compte pour ± 1, selon que χ est pair ou impair. »

Au paragraphe 3, Dyck remarque que ces observations s'étendent sans difficulté au cas où l'on supprime d'une variété M_n une variété M_χ, de caractéristique K_χ. Il montre que l'on a :

$$M_n = E_n + \sum_\chi (\mp M_\chi) \quad \text{et} \quad K_n = \sum_\chi \mp (-1)^{n-\chi} K_\chi.$$

3. *Variétés sphériques et projectives.* — Plus loin, Dyck applique ces considérations à deux variétés importantes pour la topologie :

1) Variétés sphériques :

« Une variété sphérique S_n est équivalente, au point de vue de l'*analysis situs*, à une variété linéaire L_n, pour autant que tous les systèmes $(x_1, \ldots, x_n)$ qui peuvent devenir infinis soient identifiés et considérés comme un seul point. Une ponctuation de S_n donne immédiatement l'équation symbolique : $S_n - E_0 = E_n$, et comme $-E_0$ compte pour ∓ 1 selon que n est pair ou impair, on en déduit la remarquable proposition : *La caractéristique de S_n vaut 2 ou 0 selon que n est pair ou impair* » [1] (§ 4, p. 282).

2) Variétés projectives :

« Si, en revanche, les éléments de l'infini sont considérés comme formant une variété P_{n-1}, nous obtenons une variété M_n, que nous nommerons variété projective à n dimensions. Dans ce cas, la suppression de P_{n-1} transforme P_n en une variété élémentaire, ce qui nous permet d'écrire :

$$P_n - P_{n-1} = E_n.$$

« En appliquant successivement le même raisonnement à P_{n-1}, $P_{n-2}, \ldots$, il vient :

$$\begin{aligned} P_{n-1} - P_{n-2} &= E_{n-1} \\ P_{n-2} - P_{n-3} &= E_{n-2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ P_1 - P_0 &= E_1 \\ P_0 &= 0, \end{aligned}$$

d'où :

$$P_n = E_n + E_{n-1} + \ldots + E_1 + E_0,$$

et comme les E_i se détruisent deux à deux : *la caractéristique de P est 1 ou 0 selon que n est pair ou impair* » [2].

Notre auteur établit encore le beau théorème :
« *Les variétés projectives à n dimensions sont à i.i. ou à i.n.i. selon que n est pair ou non* » [3].
Voici l'idée de la démonstration de cette proposition :

« Il suffit d'introduire dans notre variété un système de n axes de coordonnées, munis de directions positives bien déterminées, et de montrer qu'il existe un chemin fermé qui, parcouru une fois, entraîne l'inversion du signe pour un nombre impair d'axes. Pour démontrer

(1) C'est nous qui soulignons.
(2) *Ibid.*
(3) *Ibid.*

cette proposition, remarquons que P_n peut s'obtenir à partir de $E_n = x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1$ par identification diamétrale des points de sa frontière sphérique, c'est-à-dire $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \leftrightarrow -\bar{x}_1, \ldots, -\bar{x}_n$. Cette frontière se comporte comme une variété linéaire P_{n-1}. Si nous considérons un système d'axes orthogonaux dans la variété linéaire tangentielle, $n-1$ axes changeront de sens, et la variété de départ est à indicatrice inversable si $n-1$ est impair, c'est-à-dire si n est pair. »

Dans une note qui accompagne cette démonstration, Dyck expose quelques réflexions d'un intérêt historique évident :

« Une transformation continue des directions des axes de coordonnées, le long d'une courbe fermée, peut se représenter analytiquement par une transformation linéaire dépendant d'un paramètre ; lorsque, après un parcours complet, un certain nombre d'axes ont regagné leur position initiale, une partie du déterminant de la transformation a repris sa valeur de départ, avec le même signe ou avec le signe contraire, selon que le nombre d'axes qui ont changé de direction est pair ou impair. »

C'est la première fois qu'un déterminant est utilisé comme critère d'orientabilité.

Dans la conclusion de son article, Dyck signale que la démonstration de l'invariance de K_n devrait s'effectuer à partir des formes normales, comme c'est le cas pour $n = 2$. Il avoue cependant que ce problème lui semble présenter des difficultés encore insurmontables (voir aussi p. 133 sq).

3.3.9. *Application aux variétés qui sont définies analytiquement.* — Pour clore ce chapitre, nous allons essayer de montrer, en quelques lignes, comment les considérations géométriques dont nous venons de parler s'appliquent aux variétés définies par une expression analytique. Nous verrons que cette question est liée à la caractéristique de Kronecker et à la *curvatura integra* de Gauss.

Nous illustrerons cette théorie par un exemple très simple de Dyck [*26 d*, p. 466-471] : étant donné deux courbes représentées par les équations $\varphi(x, y) = 0$ et $\psi(x, y) = 0$, trouver la caractéristique de la portion de $\varphi(x, y) = 0$ contenue à l'intérieur de $\psi(x, y) = 0$. D'après la définition de ce nombre, nous savons qu'il est égal au nombre de parties de φ déterminées par son intersection avec ψ. Pour le calculer, on considère φ comme membre d'une famille $\Phi(x, y, \lambda) = 0$. La caractéristique varie visiblement d'une façon discontinue *(sprungweise)* avec λ. Si, dès lors, nous connaissons K_α pour $\lambda = \lambda_\alpha$, nous connaîtrons également K_φ en suivant la variation de K lorsque λ varie de

λ_α à λ_φ. En outre, nous pouvons également dire que $K(\lambda)$ ne varie que pour les points où φ et ψ ont une tangente commune, c'est-à-dire lorsque :

$$\Phi = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Après avoir examiné les cas qui peuvent se présenter, et en prenant $\Phi \equiv \varphi(x, y) - \lambda = 0$, Dyck obtient :

$$K^1 = \Sigma \left[\begin{vmatrix} \Delta_1 & \psi_1 \\ \Delta_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \right] \qquad \text{avec} \qquad \Delta_1 = \frac{\partial\Delta}{\partial x}, \ldots ;$$

la sommation s'étendant aux points $\varphi < 0$, $\psi = 0$, $\Delta = 0$. K^1 est ainsi la caractéristique de Kronecker du système $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\Delta = 0$.

A la page 505 du même mémoire, Dyck traite de la question suivante : déterminer la caractéristique de la surface $\varphi(x, y, z) = 0$. Pour atteindre ce but, il considère un système de courbes tracées sur $\varphi = 0$, obtenu par exemple en coupant la surface par un plan $z - \nu = 0$ parallèle au plan xy [1]. En considérant les points de contact elliptiques et hyperboliques on a :

$$K^2 = \Sigma \left[\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} \right] \qquad \text{avec} \qquad \varphi_{12} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \ldots,$$

la somme s'étendant à tous les points $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$. C'est précisément la caractéristique de Kronecker du système étudié. Par une méthode quelque peu différente, Dyck avait trouvé :

$$K^2 = \Sigma \left[\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix} \right]$$

sur tous les points $\varphi < 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$. Or cette expression est, au facteur 2 près, la *curvatura integra* de la surface.

Dans ses célèbres *Disquisitiones* de 1827 (voir *33 f* ou *33 f'*), Gauss définit la *curvatura integra* d'une surface. Puis Kronecker (1869) établit [*53 a* ou *53 a'*, p. 216] que $K = \dfrac{1}{2\pi}\,C$ entre

[1] On reconnaît ici la méthode de Möbius.

la *curvatura integra* C d'une surface $z = f(x, y)$ et la caractéristique définie à partir du système (f_x, f_y, f), sans toutefois mettre en évidence la nature topologique du nombre K. Partant des travaux de Möbius, Klein et Kronecker, Dyck montre, ainsi que nous l'avons vu dans les deux exemples précédents, l'existence d'une relation entre la caractéristique qu'il a définie et la caractéristique de Kronecker ; cela implique l'existence d'une relation entre la *curvatura integra* de Gauss et l'invariant topologique de Dyck (1). L'importance de la *curvatura integra*, qui fait ainsi son entrée dans notre science, est bien mise en évidence dans le texte suivant de Lebesgue [*55 b*, p. 323] :

« Cette notion de courbure totale est liée à toutes nos principales connaissances en *analysis situs* ; c'est d'elle que dérivent la plupart des expressions analytiques qui servent dans les démonstrations arithmétisées ; c'est elle qui suggère l'emploi des déterminants ou matrices qui nous permettent de distinguer des orientations ; c'est elle qui nous fournit le moyen d'écrire parfois qu'un point est intérieur ou extérieur à une surface et qui conduit à l'indice de Kronecker et à ses multiples généralisations. »

§ 4. CONCLUSIONS

Situées aux limites de la période que nous étudions, les *Contributions* de Dyck jouent le rôle de plaque tournante. Si, en effet, il est permis de voir en elles l'aboutissement d'une longue chaîne de travaux, on peut aussi y déceler l'une des sources du courant d'idées qui conduit aux recherches de Poincaré et à la topologie moderne. Ainsi placés à la croisée des chemins du passé et de l'avenir, les travaux de Dyck nous serviront à faire le point.

Si à la suite des recherches d'Euler, Lhuilier avait déjà donné un embryon de classification des surfaces orientables, c'est Riemann, et à un degré moindre Listing, qui inaugurent ce problème fondamental de la topologie des surfaces ; le premier s'appuyant sur cette classification sans l'étudier explicitement, le second se perdant dans des complexes par trop généraux. C'est à Möbius, puis à Jordan, que sont dues les solutions précises de ce problème. Empruntant des voies nouvelles, Möbius introduit les surfaces à un côté, qu'il ne parvient toutefois pas à intégrer à sa classification. Klein et Schläfli donnent de ces surfaces une interprétation commode et permettent à Weichold, mais surtout à Dyck, d'en élaborer une théorie complète.

(1) L'existence de cette relation apparaît déjà dans une note de J. Bertrand [*5*, p. 13].

Dans la décennie qui se termine en 1880, deux travaux ont été publiés, qui changent le cours de la pensée mathématique. Le *Programme d'Erlangen* et le mémoire que Cantor publie en 1878 [*14*], car c'est d'eux qu'il s'agit, mettent en évidence l'importance des transformations et l'extrême circonspection avec laquelle elles doivent être employées. Utilisant explicitement le second, et sans doute influencé par le premier, Dyck envisage la topologie dans une perspective nouvelle et féconde, qui lui permet de poser en termes clairs, et exempts de toutes considérations métaphysiques, le problème de la topologie des espaces à trois et à n dimensions. Dès le début, il fait dépendre la solution de ce problème de la recherche des formes normales pour les espaces à trois et à n dimensions. Dyck n'a pas résolu ce problème, et pour cause, mais il l'a posé et il en a signalé les difficultés, ce qui a toujours comme conséquence heureuse d'exciter les curiosités et par là même de susciter des travaux nouveaux.

Chapitre V

ANALYSIS SITUS ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Dans la période qui nous concerne, on a traité certains problèmes de physique mathématique, dont la solution dépend de considérations topologiques. Nous les examinerons dans leur ordre chronologique.

§ 1. Les lois de Kirchhoff

En 1847, G. R. Kirchhoff, penché sur une question d'électricité [*49 a* ; ou *49 a'*, p. 22-23], pose et résout un intéressant problème d'*analysis situs*.

La situation est la suivante : soit un circuit électrique formé de n conducteurs qui se coupent en m points. Si E_i et w_i représentent respectivement la force électromotrice et la résistance du conducteur n° i, on demande de déterminer l'intensité (J) dans chacun des conducteurs. Kirchhoff répond par les deux lois bien connues :

1) Si les arêtes $k_1, k_2, \ldots, k_r$ forment un cycle, alors :

$$w_{k_1} J_{k_1} + w_{k_2} J_{k_2} + \ldots + w_{k_r} J_{k_r} = E_{k_1} + E_{k_2} + \ldots + E_{k_r} \qquad (1)$$

2) Si les conducteurs $h_1, \ldots, h_s$ ont un point en commun, alors :

$$J_{h_1} + \ldots + J_{h_s} = 0 \qquad (2)$$

Voici la solution de Kirchhoff :

« Je me propose maintenant de démontrer que la résolution des équations qui dérivent des théorèmes 1 et 2, relativement aux $J_1, J_2, \ldots, J_n$, et étant admis que le système des conducteurs n'est pas séparé en parties disjointes, s'obtient à partir des considérations suivantes : soit $\mu = n - m + 1$; alors le dénominateur commun à toutes les intensités est la somme de toutes les combinaisons du type $w_{k_1} \cdot w_{k_2} \cdot \ldots \cdot w_{k_\mu}$, les conducteurs $k_1, \ldots, k_\mu$ étant tels que leur suppression transforme le circuit en un circuit ne contenant plus de figures fermées ; quant au numérateur de J_λ, il est égal à la somme des combinaisons de la forme $w_{k_1} \cdot w_{k_2} \cdot \ldots \cdot w_{k_{\mu-1}}$, $k_1, \ldots, k_{\mu-1}$ étant tels qu'après leur suppression il reste encore une seule figure fermée, et qu'elle contienne k_λ ; chacune de ces combinaisons est encore à multiplier par la somme des forces électromotrices qui apparaissent sur la figure fermée en question. Les forces électromotrices doivent être comptées comme positives dans le sens où J_λ est positif. »

Kirchhoff démontre d'abord que le nombre d'équations indépendantes du système (1) est égal au nombre minimal μ de fils qu'il faut supprimer pour détruire toutes les figures fermées. Ceci l'amène à considérer le système :

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_1^1 w_1 J_1 & + \alpha_2^1 w_2 J_2 & + \ldots + \alpha_n^1 w_n J_n & = \alpha_1^1 E_1 + \ldots + \alpha_n^1 E_n \\
\alpha_1^2 w_1 J_1 & + \alpha_2^2 w_2 J_2 & + \ldots + \alpha_n^2 w_n J_n & = \alpha_1^2 E_1 + \ldots + \alpha_n^2 E_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_1^\mu w_1 J_1 & + \alpha_2^\mu w_2 J_2 & + \ldots + \alpha_n^\mu w_n J_n & = \alpha_1^\mu E_1 + \ldots + \alpha_n^\mu E_n \\
\alpha_1^{\mu+1} w_1 J_1 & + \alpha_2^{\mu+1} w_2 J_2 & + \ldots + \alpha_n^{\mu+1} w_n J_n & = 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_1^n w_1 J_1 & + \alpha_2^n w_2 J_2 & + \ldots + \alpha_n^n w_n J_n & = 0
\end{array}$$

où les α valent $1, -1$ ou 0 (1).

Puis, se basant sur le fait, physiquement évident, que les systèmes (1) et (2) suffisent pour déterminer les intensités inconnues (2), Kirchhoff établit que $\mu = n - m + 1$. Il a donc montré, entre autres, que tout graphe contenant n arêtes et m sommets est transformable en un arbre de même nombre de sommets, par la suppression de $\mu = n - m + 1$ arêtes convenablement choisies. μ est ainsi un invariant attaché au graphe.

§ 2. L'électrodynamique de Maxwell

Comme nous l'avons signalé à la page 58, J. C. Maxwell a utilisé des résultats topologiques dans son célèbre ouvrage sur

(1) Si l'on écrit $w_i J_i = n_i$, la matrice du système n'est autre que la matrice d'incidence de la complexion linéaire.

(2) H. Weyl a remarqué, le premier, la nécessité de démontrer cette proposition [*95*]. A ce propos, on consultera aussi l'ouvrage de D. König [*52*, p. 140].

l'électricité et le magnétisme. Voici les passages qui intéressent notre histoire :

« Il y a toutefois des cas où les conditions pour que

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

soit une différentielle exacte, savoir :

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

sont remplies dans une région de l'espace, et où cependant l'intégrale prise de A à P peut avoir des valeurs différentes pour deux contours, tous deux entièrement compris dans la région. Ce cas peut se présenter si la région est en forme d'anneau, et si les deux lignes de A à P sont situées dans des segments opposés de l'anneau. On ne peut, dans ce cas, passer d'un contour à l'autre d'un mouvement continu sans sortir de la région. Nous sommes conduits ainsi à des considérations rentrant dans la Géométrie de position, sujet peu étudié, quoique son importance ait été signalée par Leibniz et mise en lumière par Gauss. Le travail le plus complet sur ce sujet a été donné par J. B. Listing » [*65 a*, p. 17 ; ou *65 a'*, p. 17].

Une fois définis certains concepts créés par Listing (diagramme, cyclose, périphractique, acyclique, etc.), Maxwell énonce les deux théorèmes :

« Si, dans toute l'étendue d'une région acyclique,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\,d\psi$$

la valeur de l'intégrale prise d'un point A à un point P le long d'un contour quelconque intérieur à la région, est constante », et « Dans une région cyclique pour toute l'étendue de laquelle est satisfaite l'équation $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\,d\psi$, l'intégrale de A à P n'est en général pas déterminée, si l'on ne spécifie le canal par lequel on va de A à P ».

§ 3. LES CONTRIBUTIONS DE C. NEUMANN

Dans un ouvrage publié en 1893 [*69 c*], Neumann traite de quelques problèmes de physique mathématique. Après avoir rappelé, dans les préliminaires (§ 6, 7 et 8), des résultats topologiques de son livre de 1884, Neumann étudie certains chapitres d'électrodynamique. Il y fait notamment voir l'étroite dépendance qui existe entre la topologie d'une surface chargée et son influence électromagnétique. Dans une annexe intitulée *Sur l'analysis situs* (p. 293-314), il s'occupe de problèmes topologiques qu'il nous faut maintenant passer en revue.

3.1. Deux surfaces, respectivement deux espaces, sont du même type (1) lorsque l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation continue. La sphère détermine ainsi trois types topologiques : le type de la sphère, le type de l'intérieur de la sphère, le type de l'extérieur de la sphère. Puis Neumann donne la définition suivante :

« Les surfaces obtenues par ce procédé s'appelleront sphärotiques. La sphère est la plus simple d'entre elles. La surface sphärotique la plus générale s'obtient en réunissant un nombre quelconque de surfaces sphériques par un nombre quelconque de tuyaux ; ceux-ci peuvent aussi mettre en communication une surface avec elle-même. »

La proposition principale s'énonce alors :

« Toute surface ne se recoupant pas elle-même peut être transformée, d'une façon continue, en une surface sphärotique. »

« Je considère l'existence d'une telle transformation comme un axiome, c'est-à-dire comme une proposition qui est à conserver aussi longtemps qu'aucun exemple ne vient la contredire » (§ 4).

Plus loin, Neumann s'applique à simplifier autant que possible les surfaces sphärotiques, d'abord en montrant que toutes les sphères peuvent être remplacées par l'une quelconque qui porte tous les tuyaux ; ensuite, en supprimant certains enlacements des tuyaux ; la surface obtenue est « la forme normale de la surface » (2).

Neumann termine cette première partie par l'énoncé de deux relations numériques intéressantes (§ 6) :

« *Théorème 5.* — Lorsqu'une surface sphärotique Ω possède K sphères et R tuyaux, son nombre fondamental, c'est-à-dire son ordre de connexion, est égal à $2(R - K) + 3$. Ainsi, dans une surface sphärotique de connexion $2p + 1$ on a : $p = R - K + 1$. »

« *Théorème 6.* — Lorsqu'une surface fermée Ω, $2p + 1$ fois connexe et ne se recoupant pas elle-même, est transformée d'une manière continue en sa forme normale, le nombre de tuyaux est égal à p. »

3.2. Après ces préparatifs, Neumann présente le problème qu'il considère comme fondamental :

« Soit donnés une surface Ω fermée, $2p + 1$ fois connexe et ne se recoupant pas elle-même, avec son extérieur $\mathscr{A}$ et son intérieur J. Il s'agit de déterminer d'abord un système de sections rendant Ω simplement connexe, ensuite un système de sections superficielles rendant $\mathscr{A}$ et J simplement connexes. »

(1) *Einerlei Typus.*
(2) *Normalzustand.*

Nous ne dirons rien de la première question que Neumann résout au moyen du procédé classique découvert par Riemann et qu'il avait déjà exposé dans son ouvrage de 1884. La réponse à la deuxième question est contenue dans un long théorème (p. 308 et 309), que Neumann tire de son intuition géométrique. Nous résumerons l'essentiel de cette proposition, qui contient l'un des rares résultats obtenus en topologie de l'espace au cours de la période qui nous concerne : soit Ω une surface fermée ne se recoupant pas elle-même et $2p+1$ fois connexe. Il est alors possible de choisir les couples de rétrosections $A_1, A_2, \ldots, A_p$ et $I_1, I_2, \ldots, I_p$ rendant Ω simplement connexe de telle façon que $\mathscr{A}$, respectivement J, soient rendus simplement connexes par des sections superficielles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, respectivement $L_1, L_2, \ldots, L_p$, dont le système A_i, respectivement I_i, forment une partie de la frontière. Lorsque l'une des $2p$ surfaces α_i, L_i est du type de la sphère, et que de plus elle est distincte des autres, on dira qu'elle est *délicatement simple* (1). On peut toujours, dans les conditions données, choisir le système A_i, I_i de sorte que dans tout couple $(\alpha_1, L_1), \ldots, (\alpha_p, L_p)$ l'une au moins des surfaces est *délicatement simple*. Si l'on suppose, en outre, que dans la forme normale de la surface les tuyaux ne présentent pas d'enlacements, A_i, I_i, peuvent être choisies de manière que chaque surface soit *délicatement simple*.

Il est intéressant de noter que Neumann ne va pas jusqu'à dire que deux régions limitées par des surfaces homéomorphes sont elles-mêmes homéomorphes. C'est là un signe de grande prudence et de remarquable intuition.

3.3. Dans ce que l'on pourrait appeler la troisième partie (§ 10), Neumann traite du problème de la réduction des courbes tracées sur une surface ou dans un espace. Il s'agit là d'un travail sommaire, de caractère purement intuitif.

Appelons *umgang* une courbe fermée de direction déterminée, que l'on peut réduire par les différents procédés suivants :

a) Par une transformation continue ;

b) Par juxtaposition, c'est-à-dire par la suppression d'une ligne commune parcourue une fois dans un sens, une fois dans l'autre ;

c) Par décomposition d'un *umgang* en une infinité d'*umgang* infiniment petits.

(1) *Exquisit einfach.*

En parcourant plusieurs fois un *umgang* P, on obtient un multiple de P, positif ou négatif selon le sens choisi.

« Un système $P, Q, R, \ldots, U$ d'*umgang* est dit élémentaire pour une surface ou pour un espace, lorsque tout *umgang* de cette surface, respectivement de cet espace, est réductible à 0 ou à des multiples, positifs ou négatifs, de $P, Q, R, \ldots, U$, au moyen de transformations continues, de juxtapositions ou de décompositions. »

Neumann énonce alors le théorème :

« Le système des p courbes $I_1, \ldots, I_p$ forme un *vrai* (1) système d'*umgang* élémentaires pour l'extérieur $\mathscr{A}$ de la surface Ω du théorème précédent ; de même, le système $A_1, \ldots, A_p$ est élémentaire pour l'intérieur J de Ω. Finalement, les $2p$ courbes $A_1, \ldots, A_p, I_1, \ldots, I_p$ forment un système élémentaire pour la surface Ω. »

Suivent d'intéressantes observations :

« Il est très probable que l'on puisse utiliser les remarques et les définitions de ce paragraphe pour une classification des surfaces et des espaces, et ceci à deux points de vue différents. En premier lieu, une surface ou un espace sera dit $m+1$ fois connexe, lorsque tout *vrai* système élémentaire contient *m umgang*... Pour les surfaces fermées qui ne se recoupent pas elles-mêmes, cette classification est en parfait accord, ainsi que le montrent les considérations précédentes, avec celle de Riemann. Nous ne saurions dire si un tel accord est tout à fait général ; cela nécessiterait des recherches plus approfondies... »

Cette définition de l'ordre de connexion pour les surfaces et pour les espaces est nouvelle et riche de possibilités. C'est elle que Poincaré utilisera dans ses travaux. Quant à la question soulevée par Neumann sur la concordance des deux types de classification, on sait la réponse que Poincaré en a donnée :

« Voilà donc trois variétés, dont les groupes G sont d'ordre fini ; mais ces groupes ne sont pas isomorphes ; de sorte que ces variétés ne sont pas homéomorphes ; et cependant, elles auront mêmes nombres de Betti $P_1 = P_2 = 1$. Il paraîtra naturel de restreindre le sens du mot simplement connexe et de le réserver aux variétés dont le groupe G se réduit à la substitution identique » [*72 b*, p. 257].

(1) Un système d'*umgang* élémentaire est *vrai* lorsqu'il contient le minimum possible de courbes.

En guise de conclusion

Nous terminerons par une comparaison simpliste et banale, mais qui a peut-être le mérite de faire ressortir les grandes lignes de cette petite enfance de la topologie algébrique et de préciser le rôle des acteurs principaux.

Un jour de 1736, au cours de l'une de ses nombreuses pérégrinations, Euler devina plus qu'il ne vit, émergeant des brumes, une étrange bâtisse. Quinze ans plus tard, voyageur infatigable, il revint dans ces parages, buta contre un gigantesque obstacle : c'était une aile de l'édifice entrevu en 1736. Euler n'en eut pas conscience.

En 1813, Lhuilier découvre un souterrain conduisant à l'aile aperçue d'Euler, l'explore remarquablement, puis quitte les lieux sans comprendre qu'ils appartenaient à un énorme et mystérieux complexe.

Gauss était passé à plusieurs reprises à proximité de notre bâtiment ; frappé de son immensité — dont il se rendit compte dès l'abord — il incita quelques-uns de ses amis à en faire l'exploration. Lui-même, un jour de 1825, s'en approcha assez pour distinguer la porte principale et reconnaître le type de sa serrure. Après avoir retrouvé le souterrain de Lhuilier, Listing comprit son appartenance au grand ensemble que lui avait signalé Gauss. La galerie visitée avec soin lui livra un passage menant à l'intérieur. Une obscurité profonde régnait et bien des obstacles encombraient le chemin. Notre voyageur en revint presque les mains vides. Toutefois, le compte rendu enflammé et prophétique qu'il fit de sa tournée contribua grandement à aiguiser la curiosité des explorateurs.

Vers le milieu du XIXe siècle, Riemann s'était hissé à la force des poignets le long d'une corde qui courait sur la muraille. C'est à cette occasion qu'il put examiner d'une fenêtre quelques salles du 2e étage ; il nota aussi, en observateur pénétrant, que le bâtiment était à n étages, et qu'il fallait les explorer. S'étant élevé plus haut que nul autre, il parvint de son perchoir à situer sa position par rapport à un édifice fort connu, dont il avait lui-même exploré certaines parties jusque dans le détail.

A la suite de Riemann, Carl Neumann remplaça la corde par un commode escalier : désormais, point n'était besoin d'être bâti en athlète pour contempler les paysages révélés par Riemann.

Quand Möbius découvrit à son tour la demeure, il ne savait vraisemblablement pas grand-chose des expéditions précédentes. Mais il était habile dans l'art du serrurier et, ayant trouvé la porte principale, entra sans coup férir, explora minutieusement le premier étage, visita le deuxième, découvrant des salles inédites, répertoriant et dénombrant celles qui étaient déjà connues. Il entreprit même une rapide incursion au 3e étage.

Felix Klein, quant à lui, envisagea la question sous un angle nouveau. Il pensa, avec raison, que l'analyse de l'aspect extérieur, du style d'architecture permettrait une meilleure compréhension de l'ensemble. Il reconnut que notre bâtisse n'était pas la seule de son espèce ; elle rappelait, par la structure de certaines de ses lignes directrices, plusieurs demeures que les gens du XIXe siècle avaient visitées de la cave au grenier. Il consigna soigneusement ses observations, en fit un récit qui lui valut une grande considération et attira l'attention de tous les initiés sur ce dernier-né de l'imposante famille des géométries.

Dyck entra lui aussi par la porte principale, donna un coup de lime à la clef afin qu'elle joue plus librement, huila les gonds, épousseta et restaura les deux premiers étages ; puis il découvrit quelques pièces qui avaient échappé à ses devanciers. Bien que sa tentative de dénombrer les salles du troisième ait échoué, il eut le mérite d'apercevoir et de signaler l'énorme difficulté du problème. Il monta enfin au n^e et ramena de sa visite des pièces rares et précieuses que l'on se plaît aujourd'hui encore à admirer.

Postface

RÉFLEXIONS SUR L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

> « C'est donc un service à rendre à la Géométrie, que de suppléer par une fiction au fait historique dont les traces se sont effacées. »
>
> (Louis BERTRAND.)

Si ces réflexions ont été suggérées par les problèmes techniques et philosophiques qui se sont posés à l'auteur durant la rédaction de cet ouvrage, c'est l'état catastrophique de l'enseignement de l'histoire des mathématiques dans son pays qui l'a amené à les exposer. Le lecteur sera conscient qu'elles proviennent d'un homme dont la formation est celle d'un mathématicien, qui s'est par la suite dirigé vers la recherche historique, sans apprentissage préalable, mais aussi sans préjugé d'aucune sorte. Par conséquent, les idées de ce chapitre sont parfois banales, souvent fort connues, quelquefois peut-être originales. Quoi qu'il en soit, il est permis, pour enfoncer un clou, d'utiliser un marteau qui a déjà servi.

En cette deuxième moitié du XXe siècle, l'histoire des mathématiques répond à de multiples besoins qui sont apparus aux différents stades d'évolution de la pensée humaine ; nous ne discuterons pas des plus anciens, devenus évidents, pour nous attacher particulièrement à deux d'entre eux, d'origine récente, dont les spécialistes n'ont pas toujours pris conscience.

1. D'abord, c'est là une question à incidence pratique, il devient de plus en plus difficile de concevoir un enseignement des mathématiques qui ne fasse pas appel à l'histoire. Cette constatation, qui à d'aucuns semblera une lapalissade, est loin d'être universellement admise ; nous en voulons pour preuve le fait qu'aucune école supérieure de Suisse ne propose à ses étudiants des cours réguliers d'histoire des mathématiques.

Aussi n'est-il pas inutile de développer cette observation. Prenons un exemple : imaginons une contrée habitée par une population active et curieuse de connaître le pays que le destin lui a choisi. Longtemps, de vastes étendues d'eau, de puissantes chaînes de montagnes et de vieux tabous arrêtent toutes les tentatives d'exploration. Puis soudain, plus chanceuse ou mieux inspirée, une caravane parvient à forcer le passage. Celles qui suivront, mises en confiance par ce succès, s'efforceront de simplifier le chemin. Petit à petit, elles remplaceront la périlleuse voie originale par une route directe et large. On doit toutefois se garder de penser que cette manière de voyager présente seulement des avantages. Alors que les longs et pénibles chemins d'autrefois développaient chez le voyageur qualités physiques et morales, sens de l'itinéraire et facultés d'observation, à peine ceux d'aujourd'hui laissent-ils un vague souvenir. Cela est insuffisant lorsque le voyage est prétexte à former des explorateurs.

Pour employer les termes de cet exemple, il semble que de nos jours on considère trop l'enseignement comme un véhicule rapide et confortable amenant les étudiants d'une région à l'autre. Si, bien sûr, on ne peut exiger de l'élève qu'il parcoure le chemin des pionniers, tout au moins devrait-on s'efforcer de le lui décrire, en faisant ressortir comment certains problèmes ont surgi et comment on les a résolus. Il en découle que l'historien a pour mission première, lorsqu'il se place dans la perspective de l'enseignement, la recherche des voies originales qui ont amené un auteur à telle découverte, à telle théorie. Ce problème difficile, peut-être le plus ardu de la recherche historique, n'obtient que rarement une solution représentant à coup sûr la démarche de l'auteur. Cependant, cette tentative de reconstitution est toujours intéressante ; car elle vise à découvrir la façon la plus naturelle d'introduire une théorie. C'est là une conception pragmatique de l'histoire, nous en convenons, mais « la vérité n'est pas toujours ce qui se démontre, c'est parfois aussi ce qui simplifie » (1).

Si on condamne toutes les ouvertures de la citadelle, demeurant sur le terrain strictement mathématique, le besoin d'histoire se limite à ce que nous venons de dire ; que l'on élève le débat en se plaçant dans la perspective de la pensée humaine du milieu du XXe siècle, et l'on voit cette question prendre une ampleur nouvelle.

(1) A. de Saint-Exupéry.

2. Ignorer l'histoire, c'est ignorer l'homme avec ses luttes, ses joies, ses peines, ses rêves même ; ignorer l'histoire, c'est donner à notre science une forme inhumaine et pétrifiée : on s'attache à une construction, certes magnifique, mais d'où la vie a disparu depuis longtemps. A vouloir donner aux théories qui la constituent un visage qui serait indépendant de l'homme et de son milieu, on en fait une science qui paraît sèche et sans âme, alors qu'on pourrait lui insuffler force et vie en montrant comment une théorie naît, fleurit et parfois meurt.

Cet état d'esprit s'oppose fondamentalement à l'idéal du nouvel humanisme qui tend à mettre l'homme total au centre de ses préoccupations, et à réaliser ainsi un pas important vers une certaine unité de but, si ce n'est de nature et de moyen, dans le savoir humain. A ce propos, nous citons volontiers une phrase de R. Godement [*58*, p. 326] à laquelle nous souscrivons pleinement :

> « ... et que Hilbert réalisant la décomposition spectrale des opérateurs linéaires, Perrin analysant le bleu du ciel, Monet, Debussy et Proust recréant pour notre émerveillement le scintillement de la lumière sur la mer, travaillaient tous dans le même but, qui sera aussi celui de l'avenir : la connaissance de l'univers total. »

Cette unité, de prime abord artificielle ou purement verbale, existe souvent, surtout lorsque les différentes disciplines sont considérées dans leur développement ; on remarque en effet, avec A. Denjoy [*22*, p. 13-14], que réellement :

> « Par de mystérieux accords résonnant aux âmes d'un temps, mathématiques, arts plastiques et de plume, poésie, musique, présentent à peu près dans les mêmes années des transfigurations essentielles et analogues. Un même bouillonnement, une même révolte soulèvent les esprits. Franchise de l'inspiration, toutes entraves brisées, et de l'expression aussi bien. C'est le pareil cri poussé. Peinture, poésie, mathématiques ouvrent des temps nouveaux avec Delacroix, Baudelaire, Riemann. »

Dans cet ordre d'idées, nous allons voir que l'évolution des mathématiques, dans la deuxième moitié du XIXe siècle, présente des analogies remarquables avec l'évolution de l'art au cours de la même période.

Essayons, pour commencer, de mettre en évidence les éléments qui caractérisent le passage de l'art traditionnel à l'art moderne, et penchons-nous plus particulièrement sur la peinture. En ce domaine, la création s'opère à peu près selon le schéma suivant : l'image d'une certaine partie du réel se forme sur la rétine de l'artiste ; elle passe ensuite dans le cerveau où elle subit des transformations, régies par des facteurs affectifs, intellectuels, sociaux, etc. ; puis une dernière transformation ramène dans le monde extérieur le réel ainsi transfiguré ; en notation symbolique on écrirait :

$$\text{Réel} \xrightarrow{\varphi_1} \text{rétine} \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_n} \text{tableau.}$$

Dans la période traditionnelle, le produit $\varphi_n \cdot \ldots \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1$ était, continuons à employer le langage de la géométrie, une isométrie ou plutôt une homothétie ; l'artiste cherchait à reproduire le plus fidèlement possible ce qu'il voyait ; si bien qu'on a pu dire de cet art :

« Il est réellement un moyen de représenter les choses telles qu'elles apparaissent à nos yeux lorsque nous les considérons d'un certain point de vue et en prenant soin de ne pas bouger » [67, p. 19].

Dans le naturalisme, chacun reconnaîtra l'objet que l'artiste a décrit ou représenté ; les formes qu'on y rencontre surprennent rarement le sens commun.

Dans la période suivante, le schéma reste le même, mais le produit $\varphi_n \cdot \ldots \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1$ n'est en général plus une homothétie, ou, en d'autres termes :

« En passant du domaine de la nature à celui de l'art, les objets ne restent pas les mêmes. Ils changent, pour le moins en partie, de fonction et de signification » [67, p. 26].

A la question de savoir quels sont le but et le sens d'un tel art, on doit répondre que, entre autres choses, il essaye de dégager de l'objet qu'il étudie des propriétés qui ne sont pas immédiatement visibles ; ou pour citer encore J. E. Muller :

« Il [cet art] a pour but de révéler non pas l'objet en lui-même, mais la signification qu'il a prise sous un regard singulier... L'art moderne par contre remet en question les idées que nous avons coutume de nous faire, il les ébranle, il nous invite à découvrir aux objets des aspects inédits. Se plaisant à nous dépayser, il nous conduit à affronter l'inconnu là où l'objet réel se serait signalé par sa rassurante banalité » (p. 45).

Donc l'identité extérieure entre l'objet et sa représentation ne caractérise plus une œuvre d'art ; au point que :

« La déformation est devenue l'un des traits distinctifs de l'art moderne, aussi bien dans la sculpture que dans la peinture » [67, p. 51].

Une telle conception de l'art exprime la liberté totale de l'artiste face au modèle ; cela entraîne l'apparition de formes bizarres, qui semblent n'avoir point de racine dans le monde matériel :

« L'artiste dorénavant se soucie moins de ce qu'il peut observer que de ce qu'il ressent, conçoit, imagine. Il commence par user avec liberté des données de la nature ; il a recours aux déformations, aux transpositions, et il pousse au point où les objets deviennent méconnaissables. De plus en plus l'image (naturaliste) se dévalorise au profit des significations dont peuvent être chargées la seule forme et la seule couleur » [67, p. 11].

En conclusion nous dirons, avec J. E. Muller :

« Alors que l'art de la Renaissance, soucieux de définir l'homme par tout ce qui le sépare des autres créatures, s'était appliqué à l'enfermer dans ses particularités physiques les plus distinctives, l'art moderne, en le déformant, le fait sortir de ses limites et lui découvre des affinités avec ce qui existe en dehors de lui... Qu'à l'art dominé par le souci de l'identité succède l'art qui met l'accent sur les analogies » [67, p. 72].

Montrons maintenant que le passage de la géométrie à la topologie, ou plus généralement le passage des mathématiques traditionnelles aux mathématiques modernes, s'effectue selon un mode analogue à celui que nous venons de décrire ; cela est si vrai que les citations précédentes peuvent aussi bien servir à le caractériser. Aux yeux de la géométrie classique, deux figures sont égales lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par une isométrie ou, si l'on veut, lorsque le bon sens nous dit qu'elles sont égales. En topologie, la relation d'égalité est beaucoup plus large, c'est-à-dire que les figures susceptibles d'être prises comme représentation d'un objet sont très variées, et semblent parfois fort différentes de leur modèle. Cette science nous révèle la signification prise par l'objet sous un regard singulier ; elle (et c'est là une conclusion qui vaut également pour les mathématiques modernes) remet en question les idées que nous avons coutume de nous faire, elle les ébranle, elle nous invite à découvrir aux objets des aspects inédits ; se plaisant à nous dépayser, elle nous conduit à affronter l'inconnu là où l'objet « réel » se serait signalé par sa rassurante banalité.

Ainsi, c'est en idéalisant des objets soumis à notre observation quotidienne que les mathématiciens ont obtenu les êtres géométriques fondamentaux : points, lignes, surfaces ; qu'ils ont cru, à la suite d'un nouvel effort d'abstraction, pouvoir remplacer par des expressions analytiques ; cependant, celles-ci se sont révélées plus riches que la réalité qu'elles étaient censées recouvrir ; en d'autres termes, si à chaque ligne ou surface, dont on trouve une image dans le monde extérieur, on peut faire correspondre une expression analytique, la réciproque n'est pas vraie.

Considéré dans cette perspective, le mystère des courbes continues sans dérivées n'en est plus un, et la nécessité du théorème de Jordan sur les courbes fermées se justifie autrement, et plus naturellement, que par des raisons de cohérence interne. Et certains résultats de la théorie des ensembles ne constituent-ils pas le modèle même du dépaysement, en ébranlant les idées que nous avons coutume de nous faire ?

En outre, si la déformation est devenue l'un des traits distinctifs de l'art moderne, elle est aussi intimement liée aux débuts de l'*analysis situs* ; cela est si vrai que presque toutes les premières tentatives de définition jouaient sur ce mot.

Nous poursuivrons notre comparaison en observant que lorsqu'on passe du domaine de la géométrie classique à celui de la topologie, ou plus généralement du domaine des mathématiques traditionnelles à celui des mathématiques modernes, les objets ne restent pas les mêmes, ils prennent souvent des allures méconnaissables. De plus, tandis que la géométrie, soucieuse de définir ses objets par tout ce qui les sépare des autres, s'était appliquée à les enfermer dans leurs particularités les plus distinctives, la topologie et les mathématiques modernes en général, en les déformant, les font sortir de leurs limites et leur découvrent des affinités avec ce qui existe en dehors d'eux. L'évolution des notions de nombre, de polyèdre, de surface, illustre bien ce point de vue. Ainsi donc, à la mathématique dominée par le souci d'identité, succède celle qui met l'accent sur les analogies. Henri Poincaré l'avait parfaitement compris, qui écrivait :

> « Je ne sais pas si je n'ai pas déjà dit quelque part que la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes » [*72 a*, p. 29].

De telles analogies, apparemment dues au hasard, proviennent peut-être de ce que tant la mathématique que l'art modernes procèdent d'un même phénomène mystérieux ayant son origine au plus profond du XIX^e siècle. Un premier élément d'explication pourrait être celui-ci : si l'art moderne est à coup sûr la conséquence d'une prise de conscience de la liberté totale de l'artiste face aux modèles qu'il choisit dans le monde extérieur, de même la mathématique moderne — qu'il ne faut pas confondre avec l'époque moderne en mathématique dont on fait souvent remonter l'origine à Viète, Fermat et Descartes — commence lorsque le mathématicien se rend compte de la liberté qu'il a par rapport aux modèles que lui suggère l'univers matériel qui l'entoure ;

au moment où les impressionnistes se dégageaient des tutelles académiques, le célèbre mathématicien G. Cantor s'écriait :

> « L'essence des mathématiques réside dans sa liberté. »

Jointe à celle de Poincaré, cette pensée caractérise bien la mathématique du XX^e siècle.

En cet endroit de nos réflexions, force nous est d'admettre qu'une histoire répondant aux exigences indiquées plus haut n'existe pas ; difficile, parfois impossible à écrire, elle souffre de ce que les documents sont exagérément pauvres de renseignements humains. Toujours l'homme se cache derrière son œuvre. Comme si le moi était haïssable. L'exemple suivant, tiré de notre étude, illustrera mieux ce point : A. F. Möbius, mû par une impulsion dont nous ignorons l'origine, entreprend un travail qui constitue une étape fondamentale dans le développement de la topologie. La genèse de cette œuvre présente pour nous un intérêt réel, d'autant que certains faits nous portent à croire que Gauss est à la source de plusieurs idées essentielles de Möbius. Malheureusement, le manque à peu près complet de renseignements sur les relations, pourtant étroites, qui unissaient ces deux hommes, nous interdit toute conclusion. Il ne faut surtout pas s'attendre à trouver une réponse dans les quelques biographies de Möbius, car elles sont, comme cela se doit, fort succinctes et ne touchent que des questions particulières qui ont pu sembler importantes au moment de leur rédaction. Et cette situation est générale. Alors que nombre de thèses sont consacrées à un quelconque écrivain de 10^e magnitude, on ignore presque tout des plus grands mathématiciens, de la formation et de l'évolution de leur esprit scientifique, de leur philosophie, de leurs préoccupations, et cela constitue un handicap considérable pour qui essaye d'écrire l'histoire.

Dès lors que nous avons diagnostiqué l'une des causes du mal dont souffre l'histoire de notre science, il s'agit de trouver une thérapeutique ; bien entendu, on ne peut changer quoi que ce soit à l'état des documents ; seuls une intuition brillante, un recoupement heureux peuvent ici ou là suppléer à leur absence ou à leur laconisme ; mais ce sont des circonstances fortuites dont de très rares sujets vont bénéficier. Aussi est-ce de l'avenir qu'il faut se préoccuper.

Nous avons remarqué que l'histoire est malade du manque d'un certain type de documents ; on la guérira donc en lui fournissant ce « produit ». Le « laboratoire » responsable de cette tâche sera chargé d'élaborer des questionnaires, de diriger des enquêtes, d'établir des archives ; par ce moyen, chaque chercheur pourra indiquer comment il voit l'évolution de sa propre science, les buts qu'il poursuit, ses espérances, et ses échecs qui sont souvent aussi instructifs que les succès. Ce même « laboratoire » tentera une première interprétation des documents enregistrés, et écrira ainsi une histoire actuelle. On lui reprochera sans doute de manquer d'objectivité ; on lui saura en revanche gré de contenir des renseignements d'une valeur inestimable, qu'on aura pu recueillir directement auprès des gens qui font l'histoire. Un tel travail ne doit pas être un but en soi, mais bien plutôt un tremplin pour l'historien de l'avenir, qui disposera ainsi d'un fabuleux ensemble de documents classés et analysés. De plus, cette histoire actuelle intéressera également le mathématicien et l'érudit, et c'est là « le seul critère pour reconnaître la vraie histoire, la vraie philosophie d'une science » [*55 a*, p. 104]. Ces renseignements permettront finalement d'écrire « l'histoire négative », qui est celle où l'on relate les échecs, les impasses, les faux pas de la recherche, et qui peut être autant révélatrice d'un état d'esprit, d'un courant d'idées que sa sœur l'Histoire.

Pour être écrite, cette histoire nécessite d'abord un nouveau type de chercheur, à la fois spécialiste de la branche dont il entend retracer l'évolution, chroniqueur honnête et historien compétent. En second lieu, une collaboration aussi étroite que possible entre le savant et l'historien est indispensable. Actuellement, une coopération efficace de la part du savant est encore problématique, car, trop souvent, il méconnaît le rôle de l'histoire. Absence de conscience historique que l'on comprend aisément si l'on veut bien tenir compte du fait que, pendant ses longues années de formation, le futur savant n'aborde nulle question historique. Ce sont des problèmes dont on le tient à l'écart.

Comment remédier à cette situation ? En inculquant à l'étudiant le goût et le sens de l'histoire par des cours qui montrent l'intérêt de cette science et qui mettent en lumière les problèmes ardus auxquels elle se heurte quotidiennement et qu'elle doit résoudre. Il ne s'agit pas, bien entendu, de faire de ces étudiants des érudits noyés dans un amas de détails. Mais il faut qu'ils puissent suivre la naissance et l'évolution d'une théorie, en un mot sa vie, et être attentifs aux problèmes philosophiques qu'elle ne manque pas de soulever.

Il semble donc que les raisons d'introduire l'histoire comme moyen de formation du futur scientifique ne manquent pas, et pourtant...

Chronologie

1679 Leibniz crée l'expression *analysis situs.*

1736 Euler résout le problème des ponts de Kœnigsberg.

1750 Euler découvre le théorème sur les polyèdres.

1752 Euler annonce publiquement sa découverte ainsi que sa tentative de démonstration.

1794 Legendre démontre ce théorème dans un cas particulier.

1799 Gauss démontre le théorème fondamental de l'algèbre, en utilisant un argument de nature topologique.

1810 En relation avec un travail intitulé *Sur les polygones et les polyèdres*, Poinsot parle de géométrie de situation.

1811 Cauchy étend le théorème d'Euler.

1813 Cauchy publie ce travail.

1813 Lhuilier publie sa découverte des polyèdres auxquels la relation d'Euler ne s'applique pas. Notion de genre d'un polyèdre.

1827 Gauss publie les *Disquisitiones.*

1836 Listing crée le mot « topologie ».

1847 Listing publie les *Vorstudien.*

1847 Von Staudt découvre les hypothèses sous lesquelles l'énoncé d'Euler est valable ; elles constituent la définition d'une surface polyédrale à connexion simple.

1850 Schläfli étend le théorème d'Euler au cas des espaces à n dimensions.

1851 Riemann publie sa *Dissertation*, dans laquelle on trouve la définition de l'ordre de connexion des surfaces à partir du nombre de sections transverses, et la démonstration du fait que ce nombre ne dépend pas du choix des sections transverses, mais est un invariant attaché à la surface.

1857 Riemann publie sa théorie des fonctions abéliennes, dans laquelle l'*analysis situs* joue un rôle de premier plan.

1858 Listing et Möbius découvrent le ruban de Möbius. Möbius entreprend son étude sur les polyèdres pour répondre à la question proposée par l'Académie des Sciences de Paris.

1861 Möbius remet son mémoire à l'Académie.

1862 Listing publie le *Census.* Première apparition du ruban de Möbius.

1863 Möbius publie la *Corrélation élémentaire.*

1864 Durège publie son commentaire de la théorie de Riemann.

1865 C. Neumann publie un ouvrage visant le même but que celui de Durège ; les développements consacrés à la topologie sont importants et clairs.

1865 Möbius publie son étude sur l'aire et le volume des polygones et des polyèdres.

1866 Jordan énonce le théorème fondamental de la topologie des surfaces. Dans un second mémoire, il aborde le problème de l'homotopie des courbes tracées sur des surfaces.

1871 E. Betti publie son étude sur certaines questions de la topologie des variétés à n dimensions ; il définit l'ordre de connexion de ces variétés.

1872 Klein présente le *Programme d'Erlangen.*

1874 Schläfli et Klein établissent la notion de surface double et la non-orientabilité du plan projectif.

1876 Klein introduit la distinction entre propriétés relatives et propriétés absolues, ainsi que la notion d'indicatrice.

1877 Cantor découvre la possibilité de correspondance biunivoque entre R et R^n.

1882 Klein publie son étude sur la théorie de Riemann, où l'on voit apparaître les surfaces symétriques, et la bouteille de Klein, première surface fermée non orientable (outre le plan projectif).

1883 Thèse de Weichold.

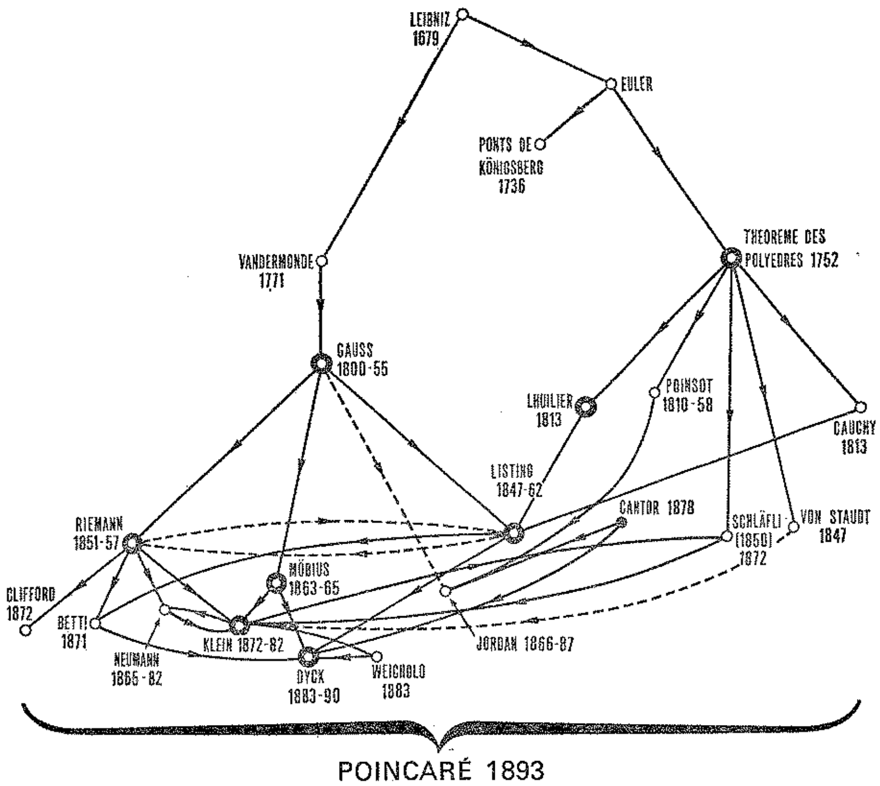
1884 Premier travail de Dyck sur la topologie des espaces à trois dimensions.

1887 Jordan publie son théorème sur les courbes fermées.

1888 Dyck publie ses *Contributions à l'*analysis situs.

1890 Dyck publie ses *Deuxièmes contributions à l'*analysis situs.

L'*analysis situs* et sa généalogie



Notices biographiques

Dans ces notices biographiques, nous nous proposons de décrire, à grands traits, la vie de quelques savants qui ont marqué la petite enfance de la topologie algébrique, en excluant ceux dont l'histoire est la plus connue comme Cauchy, Descartes, Euler, Gauss, Leibniz, Poinsot et Riemann.

Enrico Betti.

Enrico Betti est né à Pistoia en 1823. Sa carrière scientifique se déroule à l'Ecole normale supérieure de Pise, jusqu'à sa mort en 1892. Ses principaux travaux portent sur la théorie de Galois, dont il fut l'un des premiers à pénétrer les idées, sur la théorie des fonctions analytiques et sur la physique mathématique. On le considère comme l'un des promoteurs du renouveau des mathématiques en Italie au XIXe siècle.

Walther von Dyck.

Walther v. Dyck est né en 1856 à Munich. Aujourd'hui tombé dans l'oubli, il fut un personnage influent de la mathématique allemande entre 1890 et 1920. Elève, puis ami de Klein, on lui doit des travaux en théorie des fonctions, en théorie des groupes, en théorie des équations différentielles et surtout en topologie. Il est, durant de nombreuses années, rédacteur des *Mathematische Annalen* ; il est aussi l'un des promoteurs de la célèbre *Encyclopédie des sciences mathématiques.* Dès 1884, il est professeur ordinaire à Munich, où il meurt en 1934.

Camille Jordan.

Camille Jordan est né à Lyon en 1838. De son œuvre considérable, on retiendra surtout le *Traité des substitutions et des équations algébriques* (1870) et le *Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique* (1887), par qui « Camille Jordan eut des élèves dans le monde entier » [1]. Il décède en 1922, après des années douloureuses, qui le voient perdre successivement sa fille, trois de ses fils et son petit-fils à la première guerre mondiale, puis son épouse.

[1] Voir [*55 a*, p. 61].

Felix Klein.

Felix Klein est né à Dusseldorf en 1849. Il commence ses études à Bonn ; en 1868, il devient l'assistant de Plücker ; puis il travaille à Göttingen avec Clebsch, à Berlin sous Weierstrass. A partir de 1872, il enseigne à Erlangen, où il présente sa fameuse dissertation inaugurale, le *Programme d'Erlangen*. En 1875, il se déplace à Munich et y enseigne jusqu'en 1880, date à laquelle il est nommé à Leipzig. Il est appelé à Göttingen en 1886 où il professe jusqu'à sa retraite en 1911. Klein est sans doute l'un des mathématiciens les plus influents de sa génération. Non content de créer dans presque tous les domaines des mathématiques, il s'occupe encore, surtout dans la dernière partie de sa vie, de questions d'organisation et d'enseignement. Il est à la base de la célèbre *Encyclopédie des sciences mathématiques*. Il meurt à Göttingen en 1925.

Adrien-Marie Legendre.

Adrien-Marie Legendre a vu le jour à Paris en 1752. Il a marqué son époque par de remarquables ouvrages (*Eléments de géométrie*, 1794 ; *Essai sur les nombres*, 1798 ; *Théorie des nombres*, 2 vol., 1830 ; *Exercices de calcul intégral*, 3 vol., 1811-1819 ; *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, 1827-1832) qui connurent un grand succès. Il est mort en 1833.

Simon Lhuilier.

Simon Lhuilier est né à Genève en 1750. Ses premiers travaux portent sur le problème de l'isopérimétrie dans les pyramides. Son *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* remporte, en 1786, le grand prix de mathématiques de l'Académie des Sciences de Berlin. Après quelques années de préceptorat à Varsovie, il regagne Genève, où il enseigne jusqu'en 1825. Il meurt en 1840.

Johann Benedikt Listing.

Johann Benedikt Listing est né à Francfort-sur-le-Main en 1808 ; en 1829, il se rend à Göttingen où il devient l'élève de Gauss. A la suite d'un travail de géométrie différentielle, il obtient son doctorat. De 1837 à 1839, il enseigne le dessin des machines et les mathématiques à l'Ecole des Arts et Métiers de Hanovre. En 1839, il remplace W. Weber à l'Université de Göttingen. Listing est surtout connu pour ses travaux topologiques. Il décède à Göttingen en 1882.

August Ferdinand Möbius.

August Ferdinand Möbius a vu le jour à Schulpforta en 1790. En 1813-1814, il se familiarise, sous la direction de Gauss, avec l'observation et les calculs astronomiques. A partir de 1816, il est astronome, puis directeur de l'observatoire de Pleissenburg ; il enseigne à l'Université de Leipzig jusqu'à sa mort en 1868. On considère, en général, le *Barycentrische Calcul* (1827) comme son œuvre principale. Parmi ses travaux

figurent encore un célèbre manuel de statique, des contributions à la mécanique céleste et à la géométrie.

Carl Neumann.

Fils du célèbre physicien Franz Neumann, Carl Neumann est né en 1832 à Kœnigsberg où il fait ses études. En 1863, il est professeur extraordinaire à Halle ; la même année, il est nommé professeur ordinaire à Bâle. De 1865 à 1868, il enseigne à Tübingen, puis à Leipzig jusqu'à sa retraite en 1911 ; il meurt en 1925. A part ses travaux en théorie des fonctions et en électrodynamique, on lui doit essentiellement des contributions fondamentales dans le domaine de la théorie du potentiel.

Ludwig Schläfli.

Ludwig Schläfli est né près de Berne en 1814. Il enseigne au gymnase de Thoune jusqu'en 1848, puis à l'Université de Berne jusqu'à sa mort survenue en 1895. Ludwig Schläfli est l'un des plus grands mathématiciens de son temps, et il faut le placer immédiatement après Euler dans la hiérarchie des mathématiciens suisses. On lui doit de remarquables découvertes dans tous les domaines des mathématiques : à côté de quelques mémoires sur les fonctions elliptiques, la théorie des nombres et les systèmes d'équations algébriques, il s'est occupé avec brio de la théorie des surfaces du 3e ordre, de la théorie des polyèdres dans l'espace à n dimensions ; il est le co-inventeur de la loi d'inertie de Sylvester, il a découvert la non-orientabilité du plan projectif, la réduction des matrices orthogonales ; en géométrie différentielle, c'est lui qui a trouvé les conditions pour qu'une variété soit à courbure constante. Il fut d'ailleurs apprécié à sa juste valeur par les grands mathématiciens de son temps. Cayley a traduit certains de ses travaux. En 1870, il reçoit le prix Steiner de l'Académie de Berlin.

Christian von Staudt.

Karl Georg Christian von Staudt est né en 1798, à Rothenburg. Après avoir été l'élève de Gauss, il enseigne à Würzbourg, à Nuremberg, mais surtout à Erlangen de 1835 jusqu'à sa mort en 1868. L'essentiel de son œuvre est contenu dans sa *Geometrie der Lage* parue en 1847, où il développe une géométrie projective totalement indépendante de toute relation métrique.

Bibliographie

Dans cette bibliographie, nous utiliserons les abréviations suivantes :

Math. Ann., pour *Mathematische Annalen.*

C.R., pour *Comptes Rendus des Séances hebdomadaires de l'Académie des Sciences de Paris.*

Ber. Verh. Sächs., pour *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, Mathematische-Physikalische Klasse.

J. f. Math., pour *Journal für die reine und angewandte Mathematik.*

I. — Manuscrits utilisés

I. Enrico Betti.

Correspondance et manuscrits divers ; non classés. Conservés à la Bibliothèque de l'Ecole normale supérieure de Pise.

II. Carl Friedrich Gauss.

Manuscrits. Conservés à la Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (N.S.U.G.).

III. Felix Klein.

Correspondance. Conservée à la N.S.U.G.

IV. Henri Lebesgue.

Cahiers contenant des projets de conférences et de cours. Conservés par M. F. Châtelet, Université de Besançon.

V. Johann Benedikt Listing.

Correspondance. Projets d'articles. Diaria. Conservés à la N.S.U.G.

VI. August Ferdinand Möbius.

Article intitulé *Mémoire sur les polyèdres*, rédigé pour le Grand prix de Mathématiques de l'Académie des Sciences de Paris. Conservé aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris (Dossier du prix de 1861).

II. — Livres et articles cités

[*1*] W. Ahrens, Ueber das Gleichungssystem einer Kirchhoff'schen galvanischen Stromverzweigung, *Math. Ann.*, t. 49, Leipzig, 1897, p. 311-324.

[2] J. W. ALEXANDER, An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected, *Proceedings of the National Academy of Science*, t. 10, Washington, 1924, p. 8-11.
[3] P. APPELL et E. GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, Paris, Gauthier-Villars, 1895. La citation est tirée de la préface de Charles HERMITE.
[4] J. K. BECKER, Ueber Polyeder, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. 14, Leipzig, 1869, p. 65-76.
[5] J. BERTRAND, Remarque à l'occasion de la note précédente, *C.R.*, t. 50, Paris, janvier-juin 1860, p. 781-782.
[6] E. BETTI :

a) Fondamenti di una teorica generale delle Funzioni di una variabile complessa, *Annali di Matematica pura ed applicata*, Roma, 1859, 1re série, t. 2, p. 288-304 et 337-356.
b) Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni, *Annali di Matematica pura ed applicata*, 2e série, t. 4, Milano, 1871, p. 140-158.
c) Ces lettres se trouvent dans *Atti della Reale Accademia dei Lincei di Roma. Rendiconti della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, 1915*, t. 24, Roma, 1915, p. 515-516.

[7] E. BORTOLOTTI, Sopra un teorema della Teoria della connessione, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei di Roma*, 4e série, t. 4, Roma, 1889-1890, p. 229-234.
[8] N. BOURBAKI, *Eléments d'histoire des mathématiques*, 1re éd., Paris, Hermann, 1960 ; 2e éd., 1969.
[9] W. BOY, Ueber die Curvatura Integra und die Topologie geschlossener Flächen, *Math. Ann.*, t. 57, Leipzig, 1903, p. 151-184.
[10] M. BRENDEL, F. KLEIN, L. SCHLESINGER édit., *Materiellen für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss*.

a) L. SCHLESINGER, *Ueber Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie*, Heft 3, Leipzig, B. G. Teubner, 1912.
b) P. STÄCKEL, *C. F. Gauss als Geometer*, Heft 5, Leipzig, B. G. Teubner, 1912.
c) A. FRAENKEL, *Zahlbegriff und Algebra bei Gauss*, Heft 8, Leipzig, B. G. Teubner, 1920.

[11] L. E. J. BROUWER, Ueber die Invarianz der Dimensionszahl, *Math. Ann.*, t. 70, Leipzig, 1911, p. 161-165.
[12] M. BRÜCKNER, *Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte*, Leipzig, B. G. Teubner, 1900.
[13] J. J. BURCKHARDT, *Ludwig Schläfli*, Basel, Birkhäuser, 1948.
[14] G. CANTOR, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, *J. f. Math.*, t. 74, Berlin, 1878, p. 242-258.
[15] F. CASORATI, *Teorica delle Funzioni di variabili complesse*, Pavie, Fusi, 1868.
[16] A. CAUCHY, Recherches sur les polyèdres, 1er mémoire, *Journal de l'Ecole polytechnique*, t. 9, Paris, 1813, p. 68-86.

[17] J. CAVAILLÈS, *Philosophie mathématique*, 2e éd., Paris, Hermann, 1962.
Cet ouvrage est divisé en deux parties :
— Théorie abstraite des ensembles ;
— Traduction de la correspondance Cantor-Dedekind.
[18] W. K. CLIFFORD :

a) On the canonical form and dissection of a Riemann Surface, *Proceedings of the London Mathematical Society*, London, 1877, t. 8.
b) *Mathematical Papers*, edited with an Introduction by H. J. Stephen SMITH, London, Mac Millan, 1882.
c) *Lectures and Essays*, edited by L. STEPHEN and F. POLLOCK, London, Mac Millan, 1879, t. 1.

[19] S. COHN-VOSSEN, voir HILBERT [42].
[20] M. DEHN und P. HEEGAARD, Analysis situs, *Encyklopädien der mathematischen Wissenschaften*, t. 3, Heft 1, Leipzig, B. G. Teubner, 1907.
[21] A. DELACHET, *La géométrie contemporaine*, Paris, Presses Universitaires de France (coll. « Que sais-je ? »), 1957.
[22] A. DENJOY, *Hommes, formes et le nombre*, Paris, Librairie scientifique A. Blanchard, 1964.
[23] *Œuvres inédites de Descartes*, par le comte FOUCHER DE CAREIL, Paris, A. Durand, 1859, t. 2.
[24] F. DINGELDEY, *Topologische Studien*, Leipzig, B. G. Teubner, 1890.
[25] H. DURÈGE, *Elemente der Theorie der Function einer complexen veränderlichen Grösse. Mit besonderer Berücksichtigung oder Schöpfungen Riemanns*, Leipzig, B. G. Teubner, 1864 ; 3e éd. revue et augmentée, *ibid.*, 1882.
[26] W. VON DYCK :

a) *Ueber regulär verzweigte Riemannsche Flächen und die durch sie definierten Irrationalitäten*, München, 1879.
b) On the *analysis situs* of Threedimensional Spaces, 1884, *Report of the meeting of the British Association for the advancement of the science*, London, 1884, p. 664.
c) Beiträge zur *Analysis situs*, 6 juillet 1885, 8 février 1886 et 7 mars 1887, *Ber. Verh. Sächs*, t. 37, p. 314-325 ; t. 38, p. 53-69 ; t. 39, p. 40-52.
d) Beiträge zur *Analysis situs*, *Math. Ann.*, Leipzig, 1888, t. 32, p. 457-512.
e) Beiträge zur *Analysis situs*, *Math. Ann.*, Leipzig, 1890, t. 37, p. 273-316.

[27] V. EBERHARD, Ein Satz aus der Topologie, *Math. Ann.*, t. 36, Leipzig, 1890, p. 121-133.
[28] G. ENESTRÖM, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, Leipzig, B. G. Teubner, 1910-1913.
[29] A. ERRERA, L'origine et les problèmes de l'*analysis situs*, 1922, *Revue de l'Université de Bruxelles*, Bruxelles, 1922, t. 7-8.

[30] L. Euler :

a) Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Comment. acad. sc. Petrop.*, t. 8 (1736), Saint-Pétersbourg, 1741, p. 128-140.

a') Cet article est traduit par E. Coupy, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 10, Paris, 1851, p. 106-119.

b) Elementa doctrinae solidorum, *Novi comment. acad. sc. Petrop.*, t. 4 (1752-53), Saint-Pétersbourg, 1758, p. 109-140.

c) *Leonard Euler und Christian Goldbach, Briefwechsel 1729-1764*, herausgegeben und eingeleitet von A. P. Juškevič und E. Winter, Berlin, Akademie-Verlag, 1965.

d) Demonstratio nonnularum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita [1751], *Novi comment. acad. sc. Petrop.*, t. 4 (1752-53), Saint-Pétersbourg, 1758, p. 140-160.

[31] M. Fréchet et Ky Fan, *Introduction à la topologie combinatoire*, Paris, Vuibert, 1946.

[32] H. Freudenthal, Leibniz und die *Analysis situs* 1954, *Homenaje a Millas-Vallicrosa*, t. 1, Barcelona, 1954, p. 611-626.

[33] C. F. Gauss :

a) *C. F. Gauss Werke*, Göttingen, Vandenhoek & Ruprecht's Verlag, t. 3, 1866.

b) *Ibid.*, t. 5, 1867.

c) *Ibid.*, t. 10_1, 1917.

d) *Ibid.*, t. 8, 1900.

e) *Briefwechsel zwischen Gauss und Olbers*, t. 2, Berlin, Springer, 1900-1909.

f) Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827, *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores classi mathematicae*, t. 6, Gottingae, 1828, p. 99-146.

f') *Recherches générales sur les surfaces courbes*, par C. F. Gauss, traduites en français par M. E. Roger, Grenoble, Imprimerie du Prudhomme, 1855. Nouveau tirage, Paris, Blanchard, 1967.

f'') *Allgemeine Flächentheorie* von Carl Friedrich Gauss, deutsch herausgegeben von A. Wangerin, Leipzig, W. Engelmann (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften), 1900.

[34] H. Gieseking, *Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen*, Hilchenbach, 1912.

[35] C. Goldbach, voir [*30 c*].

[36] E. Goursat, voir [*2*].

[37] J. H. Graf, *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli*, Bern, K. J. Wyss, 1896.

[38] H. Grassmann :

a) *Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik* (Gekrönte Preisschrift von H. Grassmann mit einer erläuternden Abhandlung von A. F. Möbius), Leipzig, Weidmann'sche Buchhandlung, 1847.

b) *Hermann Grassmanns Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke.* Unter der Mitwirkung von Eduard Study herausgegeben von Friedrich Engel, t. 1, 1re partie, Leipzig, B. G. Teubner, 1894.

[39] J. Hadamard :

a) *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Paris, Librairie A. Blanchard, 1959. L'édition originale en langue anglaise date de 1945.

b) *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. 14, Paris, 1907, p. 31.

c) La géométrie de situation et son rôle en mathématiques, Leçon d'ouverture faite au Collège de France, 1909, *La Revue du Mois*, 4e année, t. 8, Paris, 1909 (juillet-décembre), p. 38-60 ; *Ibid.*, in *Œuvres de Jacques Hadamard*, t. 2, Paris, C.N.R.S., 1968, p. 805-829.

[40] P. Heegaard :

a) Voir [*20*].

b) *Forstudien til en topologisk teori för algebraiske*, Copenhague, Ed. Det. Nordiske Ernest Bojesen, 1898.

b') Traduction fr. de ce texte : Sur l'*analysis situs*, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 44, Paris, 1916, p. 161-242.

[41] C. Hessel, Nachträge zur Euler'schen Lehrsätze von Polyedern, *J. f. Math.*, t. 8, Berlin, 1832, p. 13-20.

[42] D. Hilbert und S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Berlin, J. Springer, 1932.

[43] M. Hirsch, *Sammlung geometrischer Aufgaben*, Berlin, Dunker und Humboldt, 1807.

[44] O. Hölder, Carl Neumann, *Math. Ann.*, t. 96, Berlin, 1926, p. 1-25.

[45] J. Houël :

a) Théorie élémentaire des quantités complexes. Première Partie. Algèbre des quantités complexes, *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. 5, Bordeaux, 1867, p. 1-64.
Ibid., Deuxième Partie. Théorie des fonctions uniformes, *ibid.*, t. 6, Bordeaux, 1868, p. 144-208.
Ibid., Troisième Partie. Théorie des fonctions multiformes, *ibid.*, t. 8, Bordeaux, 1870, p. 97-175.
Ibid., Quatrième Partie. Applications géométriques de la théorie des quantités complexes. Eléments de la théorie des quaternions, *ibid.*, 2e série, t. 1, Bordeaux, 1876, p. 1-291 avec errata des 4 parties, p. 292-296.

b) Regroupés in *Théorie élémentaire des quantités complexes*, Paris, Gauthier-Villars, 1874.

[46] *Œuvres complètes de Christian Huygens*, publiées par la Société hollandaise des Sciences, La Haye, Martinus Nijhoff, t. 8, 1899 : *Correspondance 1676-1684.*

[*47*] E. de Jonquières :
a) Note sur le théorème d'Euler dans la théorie des polyèdres, *C.R.*, t. 110, Paris, 1890, p. 169-173.
b) Note sur un mémoire de Descartes longtemps inédit, et sur les titres de son auteur à la priorité d'une découverte dans la théorie des polyèdres, *ibid.*, p. 261-266.
c) Ecrit posthume de Descartes sur les polyèdres, *ibid.*, p. 677-680.

[*48*] C. Jordan :
a) Sur la déformation des surfaces, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. 11, Paris, 1866, p. 105-109.
b) Recherches sur les polyèdres, *C.R.*, t. 62, Paris, 1866, p. 1339-1341.
c) Des contours tracés sur les surfaces, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. 11, Paris, 1866, p. 110-130.
d) *Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique*, Paris, Gauthier-Villars, 1887, t. 3.
e) *Ibid.*, 2e éd., 1893, t. 1.
f) *Notice sur les travaux de Camille Jordan*, Paris, Gauthier-Villars, 1881.
g) *Œuvres de Camille Jordan*, par René Garnier et Jean Dieudonné, t. 4, Paris, Gauthier-Villars, 1964.

[*49*] G. Kirchhoff :
a) Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird, *Annalen der Physik und Chemie*, t. 72, Leipzig, 1847, p. 497-508.
a') Repris in *Gesammelte Abhandlungen*, Leipzig, J. A. Barth, 1882, p. 22-33.

[*50*] F. Klein :
a) Voir [*10*].
b) *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Berlin, J. Springer, t. 1, 1921 ; t. 2, 1922 ; t. 3, 1923.
c) *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, t. 1, Berlin, J. Springer, 1926.
d) *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, Deichert, 1872.
d') Traduction du mémoire précédent, Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes, *Annales de l'Ecole normale supérieure*, 3e année, t. 8, Paris, 1891, p. 87-102 et 172-199.
e) Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen, *Math. Ann.*, t. 7, Leipzig, 1874, p. 549-555.
f) Ueber Flächen dritter Ordnung, *Math. Ann.*, t. 6, Leipzig, 1873, p. 551-581.
g) Ueber den Zusammenhang der Flächen, *Math. Ann.*, t. 9, Leipzig, 1876, p. 476-482.

h) *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen*, Leipzig, B. G. Teubner, 1882.

[*51*] G. S. Klügel, *Mathematisches Wörterbuch*, 5e partie, t. 2, Leipzig, Schwickert, 1808.

[*52*] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe*, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., 1936.

[*53*] L. Kronecker :
a) Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln (2. Abhandlung), *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Berlin, 1869, p. 688-698.
a') *Leopold Kronecker's Werke*, herausgegeben von K. Hensel, Leipzig, B. G. Teubner, t. 1, 1895.

[*54*] Ky Fan, voir [*31*].

[*55*] H. Lebesgue :
a) *Notices d'histoire des mathématiques*, Genève, L'Enseignement mathématique, 1958.
b) Remarques sur les deux premières démonstrations du théorème d'Euler, relatif aux polyèdres, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 52, Paris, 1924, p. 315-336.

[*56*] A.-M. Legendre, *Eléments de géométrie avec des notes*, Paris, Firmin-Didot, 1794 (an II).

[*57*] *Leibnizens mathematische Schriften*, herausgegeben von G. I. Gerhardt, 2. Abteilung, t. 1, Halle, H. Schmidt, 1858.

[*58*] F. Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, Paris, Librairie scientifique A. Blanchard, 1962.

[*59*] S. Lhuilier :
a) Mémoire sur la polyédrométrie, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, t. 3, Nîmes, 1812-1813, p. 169-192.
b) Démonstration immédiate d'un théorème fondamental d'Euler sur les polyèdres et exceptions dont ce théorème est susceptible, *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. 4, Saint-Pétersbourg, 1813, p. 271-301.

[*60*] F. Lippich, Bemerkungen zu einem Satze aus Riemann's Theorie der Functionen, *Sitzungsberichte der Wiener Academie der Wissenschaften*, t. 69, Wien, 1874.

[*61*] J. B. Listing :
a) Vorstudien zur Topologie, *Göttinger Studien*, Göttingen, 1847, p. 811-875.
b) Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern, *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, t. 10, Göttingen, 1862, p. 97-180.
c) Ueber einige Anwendungen des Census-Theorems, *Archiv der Mathematik und Physik*, t. 48, Greifswald, 1868, p. 186-198.

[62] G. Loria, *Storia delle Matematiche*, 1re éd., Milano, Soc. rip. ed. Nazionale, t. 3, 1933 ; 2e éd., Milano, Ed. Ulrico Hoepli, 1950.

[63] E. Lucas, *Récréations mathématiques*, 2e éd., Paris, Gauthier-Villars, t. 1, 1891.

[64] J. H. Manheim, *The genesis of point set topology*, New York, Mac Millan, Pergamon Press, 1964.

[65] J. C. Maxwell :

a) *A treatise on electricity and magnetism*, t. 1, Oxford, Clarendon Press, 1881.
b) *Ibid.*, t. 2.
Réédition photographique, New York, Dover, 1954.
a') En traduction, *Traité d'électricité et de magnétisme*, Paris, Gauthier-Villars, t. 1, 1885.
b') *Ibid.*, t. 2, 1895.

[66] A. F. Möbius :

a) *Gesammelte Werke*, Leipzig, S. Hirzel, 1885, t. 1 ; 1886, t. 2 ; 1886, t. 3.
b) Theorie der elementaren Verwandtschaften, *Ber. Verh. Sächs.*, t. 15, Leipzig, 1863, p. 18-57.
c) Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders, *Ber. Verh. Sachs.*, t. 17, Leipzig, 1865, p. 31-68.
d) *Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*, Leipzig, J. A. Barth, 1827.
e) Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung, *Ber. Verh. Sächs.*, t. 2, Leipzig, 1855, p. 243-314.
f) *Lehrbuch der Statik*, Leipzig, J. A. Barth, 1837.

[67] J. E. Muller, *L'art moderne, ses particularités et leur explication*, Paris, « Le livre de poche », 1963.

[68] E. Netto, *Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades*, Leipzig, W. Engelmann, 1890.

[69] C. Neumann :

a) *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, Leipzig, B. G. Teubner, 1865.
b) *Ibid.*, 2e éd., 1884.
c) *Beiträge zu einzelnen Theilen der Mathematischen Physik, insbesondere zur Elektrodynamik und Hydrodynamik, Elektrostatik und Magnetischen Induction*, Leipzig, B. G. Teubner, 1893.

[70] H. Olbers, voir [*33 b*].

[71] E. Picard :

a) (et S. Simart), *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1897.
b) *Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences*, Paris, Gauthier-Villars, 1905.

[72] H. Poincaré :

a) *Science et méthode*, Paris, Flammarion, 1908.
b) *Œuvres de Henri Poincaré*, t. VI, Paris, Gauthier-Villars, 1953.
c) *Analysis situs, Journal de l'Ecole polytechnique*, 2e série, 1er cahier, Paris, 1895, p. 1-211. *Ibid.* in *Œuvres de Henri Poincaré*, t. VI, Paris, Gauthier-Villars, 1953, p. 193-288.
d) Complément à l'*analysis situs, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 13, Palermo, 1899, p. 285-343. *Ibid.* in *Œuvres de Henri Poincaré*, t. VI, p. 290-337.

[73] L. Poinsot :

a) Sur les polygones et les polyèdres, *Journal de l'Ecole impériale polytechnique*, Paris, 1810, t. 4, p. 16-48.
b) Note sur la théorie des polyèdres, *C.R.*, t. 46, Paris, janvier-juin 1858, p. 65-79.

[74] M. L. Politano, Sull'Analysis situs di Leibniz, *Archimede*, Firenze, 1957.

[75] E. Prouhet, Notices sur la partie mathématique des œuvres inédites de Descartes publiées par M. le comte Foucher de Careil, *Revue de l'Instruction publique*, no 30, 20e année, Paris, 25 octobre 1860, p. 484-487.

[76] H. Rademacher, voir [*87*].

[77] C. Reinhardt, Zu Möbius Polyedertheorie, *Ber. Verh. Sächs.*, t. 33, Leipzig, 1881, p. 106-125.

[78] B. Riemann :

a) *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Inauguraldissertation, Göttingen, 1851.
b) Theorie der Abel'schen Functionen, *J. f. Math.*, t. 54, Berlin, 1857.
c) *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, herausgegeben von H. Weber, Leipzig, B. G. Teubner, 1876 (2e éd. 1892 ; Dover, reproduction photographique, 1953).
c') *Œuvres mathématiques de Riemann*, traduites par L. Laugel, Paris, Gauthier-Villars, 1898.

[79] A. Ritter, *Ueber das Prinzip des kleinsten Zwanges* (Inauguraldissertation), Göttingen, Druck der Dietrischen Univ.-Buchdruckerei, 1853.

[80] L. Schläfli :

a) Réduction d'une intégrale multiple, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, t. 20, Paris, 1855, p. 359-394.
b) Traduction anglaise par A. Cayley, *Quarterly Journal of Mathematics*, London, t. 2 et 3, 1858 et 1860.
c) Die Vielfache Continuität, 1901, *Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft*, Berne, 1901.

d) Quand'è che della superficie generale di terz'ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale, *Annali di Matematica pura ed applicata*, 2e série, t. 5, Milano, 1872-1873, p. 290-295.
e) Ueber die linearen Relationen zwischen den $2p$ Kreiswegen erster Art und $2p$ zweiten Art in der Theorie der Abelschen Functionen der Herren Clebsch und Gordan, *J. f. Math.*, t. 76, Berlin, 1873, p. 149-155.

[*81*] L. Schlesinger, voir [*10 a*].
[*82*] H. Seifert und L. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig, B. G. Teubner, 1934.
Nouvelle édition, New York, Chelsea Publishing Company, 1945.
[*83*] S. Simart, voir [*71 a*].
[*84*] O. Simony, Neue Thatsachen aus dem Gebiet der Topologie, *Math. Ann.*, t. 19, Leipzig, 1882, p. 110-120.
[*85*] P. Stäckel, voir [*10 b*].
[*86*] C. von Staudt, *Geometrie der Lage*, Nürnberg, Bauer und Rasse, 1847.
[*87*] E. Steinitz :
a) (und H. Rademacher), *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Berlin, J. Springer, 1934.
b) Beiträge zur *Analysis situs*, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, math.-phys. Klasse, publié dans *Archiv der Mathematik und Physik*, t. 13, Leipzig, 1908, p. 29-49.
[*88*] W. J. Stringham, Regular figures in n-dimensional Spaces, *Journal of American Mathematical Society*, t. 8, Baltimore, 1880, p. 1-14.
[*89*] L. Threlfall, voir [*82*].
[*90*] A. Tonelli, Osservazioni sulla Teoria della connessione, *Atti della reale Accademia dei Lincei in Roma*, t. 2, Roma, 1873-1874, p. 594-602.
[*91*] T. Vandermonde, Remarque sur les problèmes de situation, *Histoire de l'Académie royale des Sciences pour 1771*, 2e partie, Paris, 1774, p. 566-574.
[*92*] V. Volterra, Trois analystes italiens, Betti, Brioschi, Casorati. Présenté au Congrès de Paris en 1900, reproduit dans *Bulletin of the American Mathematical Society*, t. 7, Lancaster, 1901.
[*93*] S. von Waltershausen, *Gauss zum Gedächtnis*, Leipzig, Hirzel, 1856.
[*94*] G. Weichold, Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln der zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. 28, Leipzig, 1883, p. 321-351.
[*95*] H. Weyl, Reparticion de Corriente en una red conductora, *Revista Matematica Hispano-Americana*, nº 5, Madrid, 1923, p. 153-164.
[*96*] *C.R.*, t. 46, 1858, p. 301, Séance du 8 février 1858.
[*97*] *C.R.*, t. 53, 1861, p. 1164-1165, Séance du 23 décembre 1861.
[*98*] *C.R.*, t. 57, 1863, p. 1038-1039, Séance du 28 décembre 1863.

Index des noms de personnes

Index des concepts

Table des matières

1974. — Imprimerie des Presses Universitaires de France. — Vendôme (France)
ÉDIT. N° 33 134 IMPRIMÉ EN FRANCE IMP. N° 24 098