Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 4 – a.a. 2016-17

Da consegnare: mercoledì 2 novembre

Esercizio 1. Definiamo la seguente relazione su $\mathbb{R}$

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

1. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Dimostrare che $\mathbb{R}/\sim$ non è di Hausdorff.

Esercizio 2. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e ∞ un elemento che non appartiene ad X. Poniamo $X^\infty = X \cup \{\infty\}$. Definiamo una famiglia $\mathcal{T}^\infty$ di sottoinsiemi di X^∞ come

$$V \in \mathcal{T}^\infty \iff \begin{cases} V \in \mathcal{T} & \text{oppure} \\ V = U \cup \{\infty\} \text{ e } X - U \text{ è chiuso e compatto in } X \end{cases}$$

Dimostrare che:

1. $\mathcal{T}^\infty$ è una topologia per X^∞;
2. X^∞ è compatto in questa topologia;
3. considerando $X \subset X^\infty$, la topologia di sottospazio su X è $\mathcal{T}$;
4. sia $X = (0, 1)$ con la topologia euclidea. Dimostrare che X^∞ è omeomorfo alla circonferenza S^1;
5. sia $X = [0, 1]$ con la topologia euclidea. Cosa è X^∞?

Osservazione: X^∞ si chiama *compattificazione ad un punto* o *compattificazione di Alexandroff* di X. L'idea della costruzione è che gli intorni di ∞ (gli aperti che contengono ∞) sono i complementari dei compatti e si estendono quindi "all'infinito". Dobbiamo però aggiungere l'ipotesi di chiusura, perché altrimenti l'unione di aperti non risulta necessariamente aperta.

Esercizio 3. Siano X e Y due spazi topologici. Il *join* $X * Y$ è lo spazio topologico quoziente

$$X * Y = (X \times Y \times [0, 1])/\sim$$

dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita da:

$$(x, y, t) \sim (x', y', t') \iff \begin{cases} x = x' \text{ e } t = t' = 0 \\ \text{oppure} \\ y = y' \text{ e } t = t' = 1 \end{cases}$$

Sia $S^0 = \{-1, 1\}$ la sfera di dimensione 0 e S^1 la circonferenza. Gli spazi $S^0 * S^0$ e $S^1 * S^0$ sono omeomorfi a spazi topologici ben noti. Quali spazi sono? (basta la risposta, con una spiegazione convincente anche se non completamente rigorosa. Un disegno può aiutare.).

In generale, come si può descrivere il join $X * S^0$?