coordinata), e quindi $\mathscr{r} = L(P, Q)$. In conclusione: *le coordinate plückeriane di retta stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle rette di* $\mathbb{P}^3$ *e i punti della quadrica di Klein in* $\mathbb{P}^5$.

In modo simile è possibile introdurre coordinate plückeriane per i sottospazi proiettivi di dimensione $k-1 \geq 1$ di uno spazio $\mathbb{P}^n$. Per ulteriori dettagli rinviamo il lettore al classico trattato [2], oppure a [8].

7. Sia J un sottoinsieme dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Il sottoinsieme di $\mathbf{V}$

$$C(J) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\} : [\mathbf{v}] \in J\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

è il *cono su J in* $\mathbf{V}$. Questa terminologia è motivata dal fatto che $C(J)$ è un'unione di sottospazi vettoriali di dimensione 1 di $\mathbf{V}$. Lasciamo al lettore il compito di verificare che se $J = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$, allora $C(J) = \mathbf{W}$. Si ha inoltre

$$C(I) \cap C(J) = C(I \cap J)$$

$$C(I) \cup C(J) = C(I \cup J)$$

per ogni coppia di sottoinsiemi I, J di $\mathbb{P}$.

Esercizi

1. In ciascuno dei seguenti casi determinare un'equazione cartesiana della retta di $\mathbb{P}^2(\mathsf{C})$ contenente i punti assegnati:

a) $[-1, 1, 1], [1, 3, 2i]$ b) $[1, -1, i], [i, 1, 1]$

c) $[1, 1, 2i], [1, -2, 2i]$.

2. Verificare che le seguenti rette di $\mathbb{P}^2(\mathsf{C})$:

$$iX_1 - X_2 + 3iX_0 = 0, \quad X_0 + X_1 - iX_2 = 0, \quad 5X_0 + X_1 + 3iX_2 = 0,$$

hanno intersezione vuota.

3. Verificare che i punti $A = [1, 2, 2]$, $B = [3, 1, 4]$, $C = [2, -1, 2]$ di $\mathbb{P}^2(\mathsf{R})$ sono allineati, e determinare un'equazione cartesiana della retta che li contiene.

4. In $\mathbb{P}^3(\mathsf{R})$ siano $P = [1, 1, 0, 0]$, e H il piano di equazione

$$2X_0 - X_1 + X_3 = 0.$$

Determinare la proiezione $\pi_{P,H}$ da P in H di ognuno dei seguenti punti:

$$Q_1 = [1, 0, 0, 0],\ Q_2 = [1, 1, 1, 1],\ Q_3 = [1, -1, -1, 1],\ Q_4 = [1, 1, -1, -1].$$

5. Verificare se le rette di $\mathbb{P}^3(\mathsf{R})$

$$\mathscr{r} : X_0 - X_1 + X_2 = 0, \quad X_1 - 2X_2 + X_3 = 0$$

$$\mathscr{s} : X_0 + X_2 - 3X_3 = 0, \quad X_0 - 2X_1 - 2X_2 = 0$$

sono sghembe oppure incidenti.

6. Dimostrare che, date comunque due rette $\mathscr{r}$, $\mathscr{r}'$ sghembe in $\mathbb{P}^3(\mathsf{K})$ e un punto $P \notin \mathscr{r} \cup \mathscr{r}'$, esiste un'unica retta $\mathscr{s}$ contenente P ed incidente sia $\mathscr{r}$ che $\mathscr{r}'$.

7. In $\mathbb{P}^3(\mathsf{R})$ determinare equazioni cartesiane della retta $\mathscr{s}$ contenente P e incidente sia $\mathscr{r}$ che $\mathscr{r}'$ in ciascuno dei seguenti casi:

a) $\mathscr{r} : X_0 - X_2 + 2X_3 = 0, \quad 2X_0 + X_1 = 0$

$\mathscr{r}' : 2X_1 - 3X_2 + X_3 = 0, \quad X_0 + X_3 = 0, \quad P = [0, 1, 0, 1]$

b) $\mathscr{r} : X_0 - X_1 + X_3 = 0, \quad X_0 + X_2 - 2X_3 = 0$

$\mathscr{r}' : 2X_0 - X_1 + X_3 = 0, \quad X_0 + X_2 - X_3 = 0, \quad P = [1, 1, 2, -3]$.

8. Dimostrare che, date comunque tre rette $\mathscr{r}$, $\mathscr{r}'$, $\mathscr{r}''$ di $\mathbb{P}^4(\mathsf{K})$, non contenute in uno stesso iperpiano e a due a due sghembe, esiste un'unica retta $\mathscr{s}$ incidente $\mathscr{r}$, $\mathscr{r}'$ ed $\mathscr{r}''$.

9. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo in cui sia assegnato un riferimento proiettivo $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$ e siano

$$P_1[p_{10}, p_{11}, \dots, p_{1n}],\ P_2[p_{20}, p_{21}, \dots, p_{2n}],\ \dots,\ P_n[p_{n0}, p_{n1}, \dots, p_{nn}]$$

punti linearmente indipendenti. Dimostrare che

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & \dots & X_n \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1n} \\ p_{20} & p_{21} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

è un'equazione dell'iperpiano $L(P_1, P_2, \dots, P_n)$.

10. Siano $F_{01}, F_{02}, F_{03}, F_{12}, F_{13}, F_{23}$ i sei punti fondamentali del riferimento standard di $\mathbb{P}^5$. Verificare che F_{ij} è il punto della quadrica di Klein che corrisponde alla retta $L(F_i, F_j)$ di $\mathbb{P}^3$, dove F_0, F_1, F_2, F_3 sono i punti fondamentali del riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}^3$.

25 Geometria affine e geometria proiettiva

Gli spazi proiettivi furono inizialmente definiti come "ampliamenti" di spazi affini, ottenuti aggiungendo ad essi certi "punti impropri". Per illustrare la costruzione geometrica su cui si basa tale definizione, consideriamo $\mathbb{P}^1(\mathsf{R})$, visto come l'insieme delle rette di $\mathbb{A}^2(\mathsf{R})$ passanti per l'origine (fig. 25.1).

Per ogni $[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathsf{R})$, il punto $(\lambda x_0, \lambda x_1)$ descrive, al variare di $\lambda \in \mathsf{R}$, la corrispondente retta per l'origine in $\mathbb{A}^2(\mathsf{R})$. In particolare il punto $H_0 = [0, 1] \in \mathbb{P}^1(\mathsf{R})$ corrisponde alla retta di equazione $X_0 = 0$. Si consideri in $\mathbb{A}^2(\mathsf{R})$ la retta $\mathscr{r}$ di equazione $X_0 = 1$. Per ogni $[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathsf{R}) \setminus \{H_0\}$, la corrispondente retta di $\mathbb{A}^2(\mathsf{R})$ non è parallela a $\mathscr{r}$ e interseca $\mathscr{r}$ nell'unico punto $(1, x_0^{-1}x_1)$. Viceversa tore di uno spazio vettoriale reale di dimensione dispari possiede almeno un autovettore (cfr. 13.15(1)).

Una proiettività di uno spazio proiettivo reale di dimensione dispari può non avere punti fissi. Un esempio è dato dalla seguente proiettività $f\colon \mathbb{P}^1(\mathsf{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathsf{R})$:

$$f([x_0, x_1]) = [-x_1, x_0].$$

5. Siano P_1, P_2, P_3, P_4 punti distinti di una retta proiettiva $\mathbb{P}$. La quaterna ordinata (P_1, P_2, P_3, P_4) è detta *armonica* se

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = -1.$$

In tal caso i punti P_3, P_4 si dicono *coniugati armonici* rispetto a P_1, P_2. Dalle [27.10] segue che anche P_1, P_2 sono coniugati armonici rispetto a P_3, P_4.

Se i punti di una quaterna armonica vengono permutati in tutti i modi possibili, i valori assunti dal birapporto sono solo tre, e precisamente -1, $1/2$, 2. Ciò segue subito dalle espressioni [27.10] di tali birapporti. Si ha inoltre in tal caso

$$j(P_1, P_2, P_3, P_4) = 27/4.$$

Se P_2 è il baricentro dei punti P_1 e P_3 nella retta affine $\mathbb{P}\backslash\{P_4\}$ (il punto medio del segmento P_1P_3 se $\mathsf{K} = \mathsf{R}$), è possibile scegliere il riferimento in modo che $P_1 = P_1[1, 0]$, $P_4 = P_4[0, 1]$, $P_3 = P_3[1, 1]$, $P_2 = P_2[2, 1]$, e quindi

$$\beta(P_1, P_4, P_3, P_2) = 1/2,$$

da cui si deduce che

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = -1$$

e quindi P_1, P_2, P_3, P_4 è una quaterna armonica.

Un altro modo di costruire quaterne armoniche è il seguente. Sia $\mathbb{P}$ un piano proiettivo, e siano O_1, O_2, O_3, O_4 punti a tre a tre non allineati.

Siano $P_1 = L(O_1, O_2) \cap L(O_3, O_4)$, $P_2 = L(O_1, O_4) \cap L(O_2, O_3)$ e sia $\mathscr{r} = L(P_1, P_2)$. Consideriamo i punti di $\mathscr{r}$

$$P_3 = \mathscr{r} \cap L(O_2, O_4), \qquad P_4 = \mathscr{r} \cap L(O_1, O_3).$$

Allora P_1, P_2, P_3, P_4 è una quaterna armonica su $\mathscr{r}$ (fig. 27.1).

Per dimostrarlo fissiamo in $\mathbb{P}$ coordinate omogenee in modo che O_1, O_2, O_3 siano i punti fondamentali e O_4 il punto unità. Si calcola subito che $P_1 = P_1[1, 1, 0]$, $P_2 = P_2[0, 1, 1]$, $P_3 = P_3[1, 2, 1]$, $P_4 = P_4[1, 0, -1]$. Poiché si ha

$$(1, 2, 1) = (1, 1, 0) + (0, 1, 1)$$

$$(1, 0, -1) = (1, 1, 0) - (0, 1, 1),$$

otteniamo

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = -1.$$

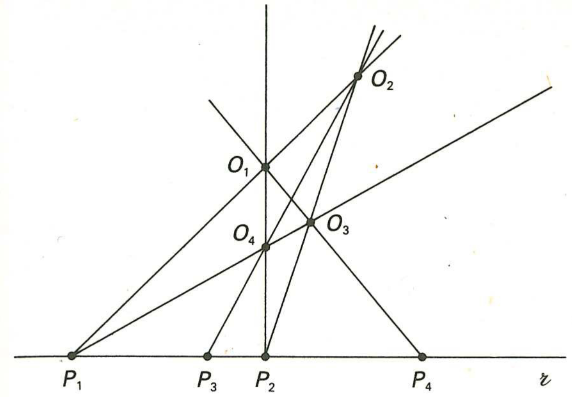

Figura 27.1

La configurazione di rette che abbiamo appena descritto è detta *quadrilatero completo*.

Esercizi

1. Determinare la formula $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ del cambiamento di coordinate dal riferimento standard di $\mathbb{P}^2(\mathsf{R})$ al riferimento individuato dai punti P_0, P_1, P_2, M in ciascuno dei casi seguenti:

a) $P_0 = [1, 1, -1]$, $P_1 = [2, 1, 0]$, $P_2 = [0, 1, 1]$, $M = [1, 1, 0]$

b) $P_0 = [1, -1, 0]$, $P_1 = [0, 1, 1]$, $P_2 = [2, 0, 1]$, $M = [1, 2, 2]$

c) $P_0 = [1, 1, 1]$, $P_1 = [1, 0, 1]$, $P_2 = \left[1, \dfrac{1}{2}, 0\right]$, $M = [4, 2, 2]$.

2. Determinare la proiettività f di $\mathbb{P}^1(\mathsf{R})$ che soddisfa le condizioni seguenti:

$f([1, 1]) = [1, -1]$, $\quad f([2, 0]) = [1, 1]$, $\quad f([1, -1]) = [2, 1]$.

3. Determinare la proiettività f di $\mathbb{P}^2(\mathsf{R})$ che soddisfa le condizioni seguenti:

$f(\mathscr{r}) = \mathscr{r}'$, $\quad f(\mathscr{s}) = \mathscr{s}'$, $\quad f([1, 2, 1] = [1, 1, 1]$, dove:

$\mathscr{r}\colon X_0 - X_1 = 0$, $\quad \mathscr{r}'\colon X_0 + X_1 = 0$, $\quad \mathscr{s}\colon X_0 + X_1 + X_2 = 0$, $\quad \mathscr{s}'\colon X_1 + X_2 = 0$.

4. Determinare i punti fissi delle seguenti proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathsf{R})$:

a) $f([x_0, x_1, x_2]) = [-x_0 + 15x_1 + 6x_2, -2x_0 + 8x_1 + 2x_2, 4x_0 - 18x_1 - 5x_2])$

b) $f([x_0, x_1, x_2]) = [x_0 - x_1, x_0 + 3x_1, 2x_2]$.

5. Dimostrare la seguente identità:

$$\beta(P_1, P_2, U, V)\, \beta(P_2, P_3, U, V)\, \beta(P_3, P_1, U, V) = 1$$

dove P_1, P_2, P_3, U, V sono punti distinti di una retta proiettiva $\mathbb{P}$.

al sistema $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Segue dalle proprietà dei cambiamenti di coordinate omogenee che la relazione così definita è una relazione di equivalenza in $\mathscr{S}$.

Una classe di equivalenza in $\mathscr{S}$ è una *curva algebrica* di $\mathbf{P}$. L'equazione

$$F(X_0, X_1, X_2) = 0 \qquad [28.13]$$

è una *equazione* della curva algebrica rappresentata dalla coppia $(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, F(X_0, X_1, X_2))$ e l'insieme $\mathscr{C}$ dei punti le cui coordinate omogenee nel riferimento $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ soddisfano la [28.13] è il suo *supporto*. Il grado di una sua qualunque equazione è detto *grado* della curva.

2. Sia $\mathscr{C} \subset \mathbf{A}^2(\mathsf{K})$ la curva piana di equazione $f(X, Y) = 0$, e siano $A = (a_{ij}) \in GL_2(\mathsf{K})$, $\mathbf{c} = {}^t(c_1 \quad c_2)$, $\mathbf{X}' = {}^t(X' \quad Y')$. L'equazione

$$f(A\mathbf{X}' + \mathbf{c}) = 0 \qquad [28.14]$$

può interpretarsi in due modi.

Per la definizione 28.3, la [28.14] può essere considerata come l'equazione di una curva piana $\mathscr{D}$ affinemente equivalente a $\mathscr{C}$, e precisamente $\mathscr{C} = T_{A,\mathbf{c}}(\mathscr{D})$. D'altra parte possiamo interpretare la sostituzione

$$\mathbf{X} = A\mathbf{X}' + \mathbf{c}$$

come un cambiamento di coordinate affini, e quindi, per quanto visto in (1), la [28.14] può anche vedersi come un'equazione della stessa curva $\mathscr{C}$ in un nuovo riferimento.

Un'osservazione del tutto simile può farsi per curve euclidee o proiettive.

3. Una generalizzazione naturale della nozione di curva algebrica piana è quella di "ipersuperficie algebrica" di $\mathbf{A}^n(\mathsf{K})$, $\mathbf{E}^n$ o $\mathbf{P}^n(\mathsf{K})$.

Un'*ipersuperficie algebrica* di $\mathbf{A}^n(\mathsf{K})$ è una classe di proporzionalità di polinomi non costanti di $\mathsf{K}[X_1, \dots, X_n]$. Se $f(X_1, \dots, X_n) \in \mathsf{K}[X_1, \dots, X_n]$ è un polinomio non costante, l'equazione

$$f(X_1, \dots, X_n) = 0 \qquad [28.15]$$

è un'*equazione dell'ipersuperficie* rappresentata da f, e il suo grado è detto *grado dell'ipersuperficie*. Il *supporto dell'ipersuperficie* di equazione [28.15] è l'insieme $\mathscr{X}$ costituito dai punti $P \in \mathbf{A}^n$ le cui coordinate sono soluzioni della [28.15]. In modo simile si definisce un'*ipersuperficie algebrica di* $\mathbf{E}^n$.

Un'*ipersuperficie algebrica di* $\mathbf{P}^n(\mathsf{K})$ è una classe di proporzionalità di polinomi omogenei non costanti di $\mathsf{K}[X_0, X_1, \dots, X_n]$. Le nozioni di *equazione, grado, supporto* si danno in modo del tutto analogo al caso delle curve piane. Si osservi che questa definizione di ipersuperficie algebrica di $\mathbf{P}^n$ è equivalente a quella che abbiamo dato nell'esempio 24.5(5).

Un'ipersuperficie di $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{E}^3$ o $\mathbf{P}^3$ è detta *superficie*, rispettivamente *affine, euclidea* o *proiettiva*.

Un'ipersuperficie di supporto $\mathscr{X}$ viene di solito denotata con la lettera $\mathscr{X}$, restando con ciò sottinteso che una sua equazione è stata assegnata. Un'ipersuperficie di grado 1 è un iperpiano, e se ha grado 2, 3, ..., si dice *quadrica, cubica* ecc.

Il lettore non avrà difficoltà a estendere al caso delle ipersuperfici algebriche le definizioni di equivalenza affine, congruenza e equivalenza proiettiva.

Esercizi

1. Determinare chiusura proiettiva e punti impropri delle curve di $\mathbf{A}^2(\mathsf{C})$ di equazioni seguenti:

   a) $X + 2Y^2 - 1 = 0$ b) $X^2Y^2 - 1 = 0$
   c) $3Y + XY + XY^2 = 0$ d) $X^2Y - XY^2 + X^2 - Y = 0$.

2. Stabilire quali delle seguenti curve di $\mathbf{E}^2$ sono simmetriche rispetto all'origine o rispetto agli assi coordinati:

   a) $XY + Y^2 - Y = 0$ b) $X + Y + XY = 0$
   c) $1 + X^2 + Y^2 = 0$.

3. Dimostrare che se $f(X, Y) \in \mathsf{R}[X, Y]$ soddisfa $f(X, Y) = f(Y, X)$, allora la curva $\mathscr{C} \subset \mathbf{E}^2$ di equazione $f(X, Y) = 0$ è simmetrica rispetto alla retta di equazione $X - Y = 0$.

29 Curve algebriche reali

Nel paragrafo 28 abbiamo considerato semplici esempi di curve di $\mathbf{A}^2(\mathsf{R})$ il cui supporto è ridotto a un solo punto, o addirittura è $\emptyset$. Questi esempi dipendono dal fatto che R non è algebricamente chiuso; essi non si presentano per curve piane complesse.

Precisamente, consideriamo in $\mathbf{A}^2(\mathsf{C})$ una curva algebrica $\mathscr{C}$ di equazione

$$f(X, Y) = 0. \qquad [29.1]$$

e supponiamo che il polinomio $f(X, Y)$ abbia grado $m \geq 1$ nella variabile Y, cioè si scriva nella forma

$$f(X, Y) = f_0(X) + f_1(X)Y + \dots + f_m(X)Y^m$$

con $f_0(X), f_1(X), \dots, f_m(X) \in \mathsf{C}[X]$. Nel caso in cui $f(X, Y)$ sia costante rispetto a Y scambieremo la X con la Y nelle considerazioni che seguono.

Sia Δ il sottoinsieme finito di C costituito dalle radici di $f_m(X)$. Per ogni $x \in \mathsf{C} \setminus \Delta$ il polinomio in Y

$$f(x, Y) = f_0(x) + f_1(x)Y + \dots + f_m(x)Y^m \qquad [29.2]$$

Analogamente, se $f(X, Y) = 0$ è l'equazione di una parabola $\mathscr{C}$ di $\mathbb{E}^2$, e $aX + bY + c$ è un polinomio non nullo di grado minore o uguale a 1, l'equazione

$$f(X, Y) + t(aX + bX + c) = 0 \qquad [35.7]$$

rappresenta ovviamente ancora una parabola per ogni $t \in \mathbb{R}$, perché i termini di secondo grado del primo membro sono gli stessi di quelli di $f(X, Y)$. Abbiamo quindi un *fascio di parabole*. Dal punto di vista proiettivo la [35.7] si interpreta osservando che la sua chiusura proiettiva è la curva di equazione

$$F(X_0, X_1, X_2) + tX_0(aX_1 + bX_2 + cX_0) = 0. \qquad [35.8]$$

Poiché le coniche di equazioni $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ e $X_0(aX_1 + bX_2 + cX_0) = 0$ hanno per tangente la retta impropria $\mathscr{t}$ nel punto improprio di $\mathscr{C}$, ciò avviene anche per la [35.8], perché entrambe appartengono al sistema lineare $\Theta_{P,\mathscr{t}}$ (cfr. complemento 1).

In modo simile si dimostra che se $\mathscr{C}$ è un'ellisse, o un'iperbole, allora per $t \in \mathbb{R}$ la [35.7] è l'equazione di un'ellisse, rispettivamente di un'iperbole, e quindi si ha un *fascio di ellissi*, rispettivamente un *fascio di iperboli*.

3. *Generazione proiettiva delle curve piane*. Sia $r \geq 0$ un intero. Per ogni $i = 0, \ldots, r$ siano $F_{i0}(\mathbf{X}), \ldots, F_{ir}(\mathbf{X})$ polinomi omogenei di grado n_i linearmente indipendenti, e sia $\Lambda_{(i)}$ il sistema lineare di curve di grado n_i di equazione

$$\lambda_0 F_{i0}(\mathbf{X}) + \ldots + \lambda_r F_{ir}(\mathbf{X}) = 0.$$

Sia $G(\mathbf{X})$ il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} F_{00}(\mathbf{X}) & \ldots & F_{0r}(\mathbf{X}) \\ F_{10}(\mathbf{X}) & \ldots & F_{1r}(\mathbf{X}) \\ \vdots & & \vdots \\ F_{r0}(\mathbf{X}) & \ldots & F_{rr}(\mathbf{X}) \end{pmatrix}.$$

che è un polinomio omogeneo di grado $n_0 + n_1 + \ldots + n_r$.

Sia $\mathscr{C} \subset \mathbf{P}^2$ la curva piana di equazione $G(\mathbf{X}) = 0$. Un punto P appartiene a $\mathscr{C}$ se e solo se la matrice [35.9], calcolata in P, ha rango $\leq r$. Ciò è equivalente all'esistenza di una soluzione non banale del sistema di equazioni lineari omogenee di cui essa è la matrice dei coefficienti, cioè all'esistenza di $l_0, \ldots, l_r \in \mathsf{K}$ non tutti nulli tali che si abbia simultaneamente

$$l_0 F_{i0}(P) + \ldots + l_r F_{ir}(P) = 0, \quad i = 0, \ldots, r.$$

Quindi $P \in \mathscr{C}$ se e solo se P appartiene simultaneamente alle $r+1$ curve di equazioni

$$l_0 F_{i0}(\mathbf{X}) + \ldots + l_r F_{ir}(\mathbf{X}) = 0, \quad i = 0, \ldots, r.$$

Questa descrizione di $\mathscr{C}$ è una sua *generazione proiettiva* per mezzo dei sistemi lineari $\Lambda_{(0)}, \ldots, \Lambda_{(r)}$.

Ad esempio, dati $F_{00}(\mathbf{X})$, $F_{01}(\mathbf{X})$ omogenei di grado n, $F_{10}(\mathbf{X})$, $F_{11}(\mathbf{X})$ omogenei di grado m, linearmente indipendenti, la curva di grado $n + m$ di equazione

$$F_{00}(\mathbf{X}) F_{11}(\mathbf{X}) - F_{01}(\mathbf{X}) F_{10}(\mathbf{X}) = 0 \qquad [35.10]$$

è il luogo dei punti di intersezione variabile delle curve dei due fasci

$$\lambda_0 F_{00}(\mathbf{X}) + \lambda_1 F_{01}(\mathbf{X}) = 0$$
$$\lambda_0 F_{10}(\mathbf{X}) + \lambda_1 F_{11}(\mathbf{X}) = 0$$

per stessi valori dei parametri λ_0, λ_1. Nel caso $n = m = 1$ la [35.10] è una conica.

Esercizi

1. Siano (a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2), (c_0, c_1, c_2), (d_0, d_1, d_2), (e_0, e_1, e_2), (f_0, f_1, f_2) sei punti di $\mathbf{P}^2(\mathsf{K})$. Dimostrare che esiste una conica che li contiene se e solo se è soddisfatta la condizione

$$\begin{vmatrix} a_0^2 & a_0a_1 & a_0a_2 & a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \\ b_0^2 & b_0b_1 & b_0b_2 & b_1^2 & b_1b_2 & b_2^2 \\ c_0^2 & c_0c_1 & c_0c_2 & c_1^2 & c_1c_2 & c_2^2 \\ d_0^2 & d_0d_1 & d_0d_2 & d_1^2 & d_1d_2 & d_2^2 \\ e_0^2 & e_0e_1 & e_0e_2 & e_1^2 & e_1e_2 & e_2^2 \\ f_0^2 & f_0f_1 & f_0f_2 & f_1^2 & f_1f_2 & f_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Siano (a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2), (c_0, c_1, c_2), (d_0, d_1, d_2), (e_0, e_1, e_2), cinque punti di $\mathbf{P}^2(\mathsf{K})$. Dimostrare che essi impongono condizioni indipendenti al sistema lineare delle coniche se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0^2 & a_0a_1 & a_0a_2 & a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \\ b_0^2 & b_0b_1 & b_0b_2 & b_1^2 & b_1b_2 & b_2^2 \\ c_0^2 & c_0c_1 & c_0c_2 & c_1^2 & c_1c_2 & c_2^2 \\ d_0^2 & d_0d_1 & d_0d_2 & d_1^2 & d_1d_2 & d_2^2 \\ e_0^2 & e_0e_1 & e_0e_2 & e_1^2 & e_1e_2 & e_2^2 \end{pmatrix}$$

ha rango massimo. Dimostrare che se questa condizione è soddisfatta, allora la conica che contiene i cinque punti assegnati ha equazione

$$\begin{vmatrix} X_0^2 & X_0X_1 & X_0X_2 & X_1^2 & X_1X_2 & X_2^2 \\ a_0^2 & a_0a_1 & a_0a_2 & a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \\ b_0^2 & b_0b_1 & b_0b_2 & b_1^2 & b_1b_2 & b_2^2 \\ c_0^2 & c_0c_1 & c_0c_2 & c_1^2 & c_1c_2 & c_2^2 \\ d_0^2 & d_0d_1 & d_0d_2 & d_1^2 & d_1d_2 & d_2^2 \\ e_0^2 & e_0e_1 & e_0e_2 & e_1^2 & e_1e_2 & e_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

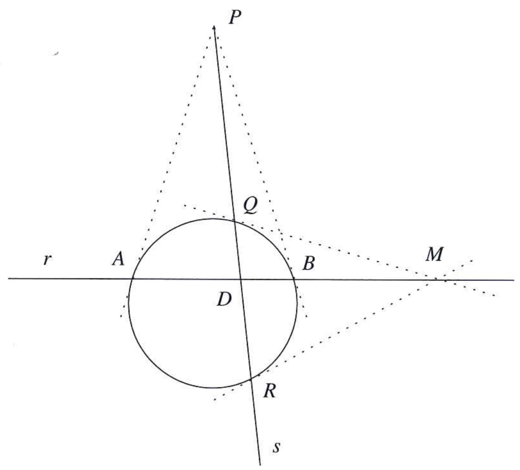

Figura 4.4. La configurazione descritta nell'Esercizio 4.17

Soluzione 1 Poiché $P \notin \mathcal{C}$, la polare r non passa per P; pertanto le rette r e s non possono coincidere e quindi si intersecano in un unico punto D.

Il punto D non può appartenere alla conica $\mathcal{C}$, infatti altrimenti, essendo D un punto della polare di P, la retta $L(D,P) = s$ sarebbe tangente alla conica (cfr. 1.8.2), contro l'ipotesi. Dunque in particolare D è diverso sia da R che da Q.

La polare $\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(D)$ passa per P e interseca r in un punto M tale che P, D, M sono i vertici di un triangolo autopolare per $\mathcal{C}$. Esiste allora un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ rispetto al quale si ha $P = [1,0,0], D = [0,1,0], M = [0,0,1]$. In tali coordinate s ha equazione $x_2 = 0$ e una matrice associata alla conica è del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ con a e b non nulli, ossia $x_0^2 + ax_1^2 + bx_2^2 = 0$ è un'equazione della conica. Calcolando le intersezioni fra $\mathcal{C}$ e s si trova che $Q = [\alpha, 1, 0]$ e $R = [-\alpha, 1, 0]$ con $\alpha^2 = -a$.

Nel sistema di coordinate x_0, x_1 indotto su s si ha che $P = [1,0], D = [0,1], Q = [\alpha, 1], R = [-\alpha, 1]$. Pertanto $\beta(P,D,Q,R) = -1$.

Soluzione 2 Poiché $P \notin \mathcal{C}$, la retta $\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(P)$ interseca $\mathcal{C}$ in due punti distinti, diciamo A e B. Inoltre, si verifica facilmente che A, B, P, Q sono in posizione generale, per cui possiamo porre su $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ un sistema di coordinate rispetto al quale si abbia $P = [1,0,0]$, $A = [0,1,0]$, $B = [0,0,1]$ e $Q = [1,1,1]$. Imponendo che si abbia $\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(A) = L(A,P) = \{x_2 = 0\}$, $\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(B) = L(B,P) = \{x_1 = 0\}$, e $Q \in \mathcal{C}$, si ottiene facilmente che $\mathcal{C}$ ha equazione $x_0^2 - x_1x_2 = 0$. Poiché $s = L(P,Q)$ ha equazione $x_1 = x_2$, ne segue che $R = [-1,1,1]$. Inoltre, poiché $r = L(A,B)$ ha equazione $x_0 = 0$, si ha $D = r \cap s = [0,1,1]$. Dunque

$$\beta(P,D,Q,R) = \beta([1,0,0],[0,1,1],[1,1,1],[-1,1,1]) = -1.$$

Soluzione 3 Ragionando come nella Soluzione (1), si prova che il punto D esiste ed è unico. Siano A, B definiti come nella Soluzione (2). L'insieme $\mathcal{F}$ delle coniche tangenti in A alla retta $L(P,A)$ e tangenti in B alla retta $L(P,B)$ è un fascio con punti base A e B. Poiché R è diverso sia da A che da B, esiste una sola conica nel fascio che passa per R e tale conica è $\mathcal{C}$.

Poiché i punti P, Q, A, B ed i punti P, R, A, B sono in posizione generale, esiste un'unica proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che $f(P) = P, f(Q) = R, f(A) = A$ e $f(B) = B$. Tale f lascia invariate le rette $L(P,A)$ e $L(P,B)$ e porta $\mathcal{C}$ in una conica tangente a $L(P,A)$ in A, tangente a $L(P,B)$ in B e passante per R. Per l'unicità ricordata sopra, $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Inoltre, $f(s) = s$, per cui $f(s \cap \mathcal{C}) = s \cap \mathcal{C}$, ossia $f(\{Q,R\}) = \{Q,R\}$. Siccome $f(Q) = R$, si ha $f(R) = Q$. Infine, poiché $f(r) = r$ si ha anche $f(D) = D$. Dunque

$$\beta(P,D,Q,R) = \beta(f(P),f(D),f(Q),f(R)) = \beta(P,D,R,Q) = \beta(P,D,Q,R)^{-1}$$

(cfr. 1.5.2). Allora $\beta(P,D,Q,R)^2 = 1$; poiché $Q \neq R$, ne segue $\beta(P,D,Q,R) = -1$.

Esercizio 4.18

Si consideri il seguente fascio di coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$2\lambda x_0^2 - (\mu+\lambda)x_1^2 + (\mu-\lambda)x_2^2 - 2\mu x_0x_1 - 2\mu x_0x_2 = 0, \qquad [\lambda,\mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

(a) Si determinino le coniche degeneri e i punti base del fascio.
(b) Si dimostri che esiste una ed una sola retta tangente a tutte le coniche del fascio.
(c) Si determinino tutte le coniche del fascio che nella carta affine U_0 sono parabole.

Soluzione (a) La generica conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ del fascio è rappresentata dalla matrice

$$A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -\mu & -\mu \\ -\mu & -\lambda-\mu & 0 \\ -\mu & 0 & \mu-\lambda \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det A_{\lambda,\mu} = 2\lambda^3$, il fascio contiene una sola conica degenere $\mathcal{D}_1$ di equazione $-x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0$, ossia $(2x_0 + x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$. Chiamiamo l_1 e l_2 le componenti irriducibili di $\mathcal{D}_1$ di equazione rispettivamente $2x_0 + x_1 - x_2 = 0$ e $x_1 + x_2 = 0$; esse si intersecano nel punto $P = [1,-1,1]$.

Scegliamo un'altra conica del fascio, ad esempio in corrispondenza della coppia omogenea $[\lambda,\mu] = [1,0]$; otteniamo così la conica $\mathcal{D}_2$ di equazione $2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$. Intersecando le generatrici $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ del fascio, troviamo che i punti base sono $P = [1,-1,1]$ e $Q = [1,1,-1]$.

(b) Nel punto P la conica irriducibile $\mathcal{D}_2$ è tangente alla componente l_1 di $\mathcal{D}_1$; di conseguenza tutte le coniche del fascio risulteranno tangenti alla retta l_1 in P (cfr. 1.9.5).

Se r è una retta tangente a tutte le coniche del fascio, r deve essere tangente in particolare alla conica degenere $\mathcal{D}_1 = l_1 + l_2$. Pertanto r deve passare per P. D'altra

Tale conica passa per P_5 se e solo se $3\lambda + 4\mu = 0$; scegliendo $[\lambda, \mu] = [4, -3]$, otteniamo come soluzione la conica di equazione $4x_0x_1 - 3x_2(x_0 + x_1 - x_2) = 0$.

(b) La conica $\mathcal{C}$ è rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A \neq 0$, la conica è non degenere.

Visto che l'applicazione $\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}$ è un isomorfismo proiettivo (cfr. 1.8.2), esiste un unico punto $R = [a, b, c]$ tale che $\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(R)$ è la retta r di equazione $5x_0 + x_1 - 3x_2 = 0$. Poiché $\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(R)$ ha equazione ${}^tRAX = 0$, ossia

$$(4b - 3c)x_0 + (4a - 3c)x_1 + (-3a - 3b + 6c)x_2 = 0,$$

i valori a, b, c richiesti saranno quelli per cui esiste $h \neq 0$ tale che

$$(4b - 3c, 4a - 3c, -3a - 3b + 6c) = h(5, 1, -3).$$

Le soluzioni di tale sistema lineare sono costituite dalla famiglia $\{(t, 2t, t) \mid t \in \mathbb{C}\}$, per cui il punto $R = [1, 2, 1]$ soddisfa la richiesta.

Osserviamo che un modo alternativo per determinare R è quello di scegliere due punti M, N distinti su r e prendere $R = \mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(M) \cap \mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(N)$: per la proprietà di reciprocità, $\mathrm{pol}_{\mathcal{C}}(R) = L(M, N) = r$.

Esercizio 4.2

Siano P_1, P_2, P_3 punti non allineati di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e sia r una retta passante per P_1 e non passante né per P_2 né per P_3. Si consideri il sottoinsieme dello spazio Λ_2 delle coniche proiettive di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{C} \in \Lambda_2 \mid \mathcal{C} \text{ passa per } P_1, P_2, P_3 \text{ ed è tangente a } r \text{ in } P_1\}.$$

Si mostri che $\mathcal{F}$ è un sistema lineare, e se ne calcoli la dimensione.

Soluzione 1 Imporre che una conica $\mathcal{C}$ sia tangente a r in P_1 corrisponde a imporre due condizioni lineari indipendenti (cfr. Esercizio 3.43 e Nota successiva). Le coniche di $\mathcal{F}$ si ottengono imponendo anche il passaggio per i punti P_2 e P_3 e cioè altre due condizioni lineari, per cui $\mathcal{F}$ è un sistema lineare di dimensione ≥ 1.

In effetti $\mathcal{F}$ ha dimensione 1, ossia è un fascio. Per provare ciò, supponiamo per assurdo che $\mathcal{F}$ abbia dimensione almeno 2 e scegliamo un quarto punto $P_4 \notin r$ in modo che P_1, P_2, P_3, P_4 siano in posizione generale. Sia $\mathcal{F}'$ il sistema lineare formato dalle coniche di $\mathcal{F}$ che passano anche per P_4; poiché $\dim \mathcal{F}' \geq \dim \mathcal{F} - 1 \geq 1$, possiamo scegliere due coniche distinte $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ in $\mathcal{F}'$. Tali coniche si intersecano in almeno 5 punti contati con molteplicità (in quanto $I(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, P_1) \geq 2$ visto che $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sono entrambe tangenti alla retta r in P_1, cfr. 1.9.3). Di conseguenza per il Teorema di Bézout $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ hanno una retta in comune l e sono entrambe degeneri, cioè $\mathcal{C}_1 = l + r_1$ e $\mathcal{C}_2 = l + r_2$. Affinché due coniche siffatte siano tangenti a r in P_1, ci sono solo due possibilità: o $l = r$ oppure l e r_i, $i = 1, 2$, si incontrano in P_1. Il primo caso non è possibile perché r_i dovrebbe passare per i punti P_2, P_3, P_4 che non sono allineati.

Neppure il secondo caso è possibile perché almeno due fra P_2, P_3, P_4 dovrebbero stare o su l o su r_i e quindi risulterebbero allineati con P_1. Abbiamo così trovato una contraddizione, per cui $\dim \mathcal{F} = 1$.

Soluzione 2 È possibile anche risolvere l'esercizio per via analitica. Sia R un punto di r non allineato con P_2 e P_3; scegliendo P_1, P_2, P_3, R come riferimento proiettivo, abbiamo $P_1 = [1, 0, 0], P_2 = [0, 1, 0], P_3 = [0, 0, 1], R = [1, 1, 1]$ e $r = L(P_1, R) = \{x_1 - x_2 = 0\}$. Sia $\mathcal{C}$ una conica di $\mathcal{F}$ e sia M una matrice simmetrica che la rappresenta. Poiché $\mathcal{C}$ passa per $[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$, gli elementi della diagonale principale di M devono essere nulli, ossia $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{K}$ non tutti nulli. Dunque $\mathcal{C}$ ha equazione del tipo $F(x_0, x_1, x_2) = ax_0x_1 + bx_0x_2 + cx_1x_2 = 0$.

Poiché $\nabla F = (ax_1 + bx_2, ax_0 + cx_2, bx_0 + cx_1)$ e $\nabla F(1, 0, 0) = (0, a, b)$, la retta r è tangente a $\mathcal{C}$ in P_1 se e solo se $b = -a$. Pertanto $\mathcal{F}$ è formato da tutte e sole le coniche rappresentate da matrici della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix}, \qquad [a, c] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$$

per cui $\mathcal{F}$ è un sistema lineare di dimensione uno, ovvero un fascio.

Nota. Il risultato vale anche nel caso in cui la retta r passi, ad esempio, per P_2. Infatti in tal caso ogni conica $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$ interseca r in almeno 3 punti contati con molteplicità e quindi per il Teorema di Bézout la retta r è componente di $\mathcal{C}$. Di conseguenza le coniche di $\mathcal{F}$ sono tutte e sole quelle di tipo $r + s$ al variare di s nel fascio di rette di centro P_3, per cui $\mathcal{F}$ è ancora un fascio (cfr. Esercizio 3.44).

Esercizio 4.3

Si considerino in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ i punti

$$P_1 = [0, 1, 2], \quad P_2 = [0, 0, 1], \quad P_3 = [2, 1, 2], \quad P_4 = [3, 0, 1].$$

Si determini, se esiste, l'equazione di una conica passante per P_1, P_2, P_3, P_4 e tangente in P_3 alla retta r di equazione $x_0 - x_2 = 0$.

Soluzione Osserviamo che la retta r passa per il punto P_3 e che P_1, P_2, P_3 non sono allineati. La conica cercata appartiene al fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per P_1, P_2, P_3 e tangenti in P_3 a r (cfr. Esercizio 4.2 e Nota successiva). Esso è generato dalle coniche degeneri $r + L(P_1, P_2)$ e $L(P_1, P_3) + L(P_2, P_3)$.

Poiché $L(P_1, P_2) = \{x_0 = 0\}$, $L(P_1, P_3) = \{2x_1 - x_2 = 0\}$ e $L(P_2, P_3) = \{x_0 - 2x_1 = 0\}$, la generica conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ di $\mathcal{F}$ ha equazione

$$\lambda x_0(x_0 - x_2) + \mu(2x_1 - x_2)(x_0 - 2x_1) = 0.$$

$(v-u)(v+u)+u^2v=0$. Dunque $(0,0)$ è un punto doppio ordinario di $\tau(\mathcal{C}\cap U_0)$. Ne segue che $[1,0,-1]$ è un punto doppio ordinario di $\mathcal{C}$.

Esercizio 3.15

Sia $\mathcal{C}$ la curva proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$F(x_0,x_1,x_2)=x_0x_2^2-x_1^3+x_0x_1^2+5x_0^2x_1-5x_0^3=0$$

e sia $Q=[0,1,0]$. Si verifichi che $\mathcal{C}$ è non singolare e si determinino i punti $P\in\mathcal{C}$ tali che la tangente a $\mathcal{C}$ in P passi per il punto Q.

Soluzione Supponiamo che (x_0,x_1,x_2) risolva il sistema

$$\begin{cases} F_{x_0} &= x_2^2+x_1^2+10x_0x_1-15x_0^2=0\\ F_{x_1} &= (x_0+x_1)(5x_0-3x_1)=0\\ F_{x_2} &= 2x_0x_2=0 \end{cases}.$$

Da $F_{x_2}=0$ si deduce che $x_0=0$ o $x_2=0$. Nel primo caso, da $F_{x_1}=0$ si deduce $x_1=0$, per cui $F_{x_0}=0$ permette di concludere che anche $x_2=0$. Nel secondo caso, da $F_{x_1}=0$ si deduce $x_0=-x_1$ oppure $x_1=\frac{5}{3}x_0$. Insieme alla condizione $x_2=0$, ciascuna di queste uguaglianze, se sostituita in $F_{x_0}=0$, implica $x_0=x_1=0$. In ogni caso abbiamo mostrato $x_0=x_1=x_2=0$, per cui $\mathcal{C}$ è non singolare.

La tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $[y_0,y_1,y_2]$ ha equazione $F_{x_0}(y_0,y_1,y_2)x_0+F_{x_1}(y_0,y_1,y_2)x_1+F_{x_2}(y_0,y_1,y_2)x_2=0$, e pertanto contiene Q se e solo se $F_{x_1}(y_0,y_1,y_2)=0$. Ne segue che tutti e soli i punti di $\mathcal{C}$ la cui tangente contiene Q sono determinati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} F(y_0,y_1,y_2) &= y_0y_2^2-y_1^3+y_0y_1^2+5y_0^2y_1-5y_0^3=0\\ F_{x_1}(y_0,y_1,y_2) &= (y_0+y_1)(5y_0-3y_1)=0 \end{cases},$$

che è soddisfatto dai punti di coordinate $[0,0,1]$, $[1,-1,2\sqrt{2}]$, $[1,-1,-2\sqrt{2}]$, $[3\sqrt{3},5\sqrt{3},2i\sqrt{10}]$, $[3\sqrt{3},5\sqrt{3},-2i\sqrt{10}]$.

Nota. Dimostreremo nell'Esercizio 3.29 che, se $\mathcal{C}$ è una curva liscia di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di grado maggiore di 1 e $Q\in\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, allora l'insieme delle rette tangenti a $\mathcal{C}$ che si possono condurre da Q è sempre finito e non vuoto.

Inoltre, nella soluzione dell'Esercizio 3.15 si è osservato che i punti della cubica $\mathcal{C}$ la cui tangente τ_P contiene Q sono i punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con la conica $\mathcal{Q}$ definita dall'equazione $F_{x_1}=0$. Per il Teorema di Bézout il numero di tali punti, contati con molteplicità, è uguale a 6. In effetti, non è difficile verificare che il punto $P=[0,0,1]$ è un flesso e che $I(\mathcal{C},\mathcal{Q},P)=2$, mentre i 4 punti restanti non sono flessi e in tali punti $\mathcal{C}$ e $\mathcal{Q}$ si intersecano con molteplicità 1.

Esercizio 3.16

Sia $\mathcal{C}$ la curva di $\mathbb{C}^2$ di equazione $f(x,y)=xy^2-y^4+x^3-2x^2y=0$. Si determinino:

(a) I punti impropri e gli asintoti di $\mathcal{C}$.
(b) I punti singolari di $\mathcal{C}$ con le relative molteplicità e tangenti principali, specificando quali di essi sono punti singolari ordinari.
(c) L'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P=(4,-4)$.

Soluzione (a) Identificando $\mathbb{C}^2$ con la carta affine U_0 di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ attraverso la mappa $j_0\colon\mathbb{C}^2\to U_0$ definita da $j_0(x_1,x_2)=[1,x_1,x_2]$, la chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$ ha equazione

$$F(x_0,x_1,x_2)=x_0x_1x_2^2-x_2^4+x_0x_1^3-2x_0x_1^2x_2=0.$$

Calcolando l'intersezione fra $\overline{\mathcal{C}}$ e la retta $x_0=0$, troviamo come unico punto improprio $P=[0,1,0]$.

Usando le coordinate affini $u=\frac{x_0}{x_1}$, $v=\frac{x_2}{x_1}$ nella carta affine U_1, il punto P ha coordinate $(0,0)$ e la parte affine $\overline{\mathcal{C}}\cap U_1$ ha equazione $uv^2-v^4+u-2uv=0$. Pertanto P è un punto semplice di $\overline{\mathcal{C}}$ e la tangente a $\overline{\mathcal{C}}\cap U_1$ in P ha equazione $u=0$. Dunque la tangente a $\overline{\mathcal{C}}$ in P è la retta $x_0=0$, e di conseguenza non ci sono asintoti per $\mathcal{C}$.

(b) Ricordiamo che i punti singolari di $\mathcal{C}$ sono i punti propri che sono singolari per $\overline{\mathcal{C}}$. Per determinare i punti singolari di $\overline{\mathcal{C}}$, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} F_{x_0} = & x_1x_2^2+x_1^3-2x_1^2x_2=x_1(x_2-x_1)^2=0\\ F_{x_1} = & x_0x_2^2+3x_0x_1^2-4x_0x_1x_2=0\\ F_{x_2} = & 2x_0x_1x_2-4x_2^3-2x_0x_1^2=0 \end{cases},$$

che ha come unica soluzione il punto $Q=[1,0,0]$, che corrisponde a $(0,0)\in\mathbb{C}^2$. Dall'equazione di $\mathcal{C}$ riconosciamo che $(0,0)$ è un punto triplo; poiché la parte omogenea di grado 3 di $f(x,y)$ è $xy^2+x^3-2x^2y=x(x-y)^2$, vediamo che le tangenti principali a $\mathcal{C}$ nell'origine sono le rette $x=0$ e $x-y=0$ (quest'ultima con molteplicità 2). Dunque l'origine è una singolarità non ordinaria.

(c) Poiché $F_{x_0}(1,4,-4)=256$, $F_{x_1}(1,4,-4)=128$, $F_{x_2}(1,4,-4)=192$, l'equazione della retta proiettiva tangente a $\overline{\mathcal{C}}$ in $[1,4,-4]$ è $4x_0+2x_1+3x_2=0$. Ne segue che la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P ha equazione $2x+3y+4=0$.

Esercizio 3.17

Si consideri la curva $\mathcal{C}$ di $\mathbb{C}^2$ di equazione $f(x,y)=x-xy^2+1=0$.

(a) Si determinino i punti singolari e gli asintoti di $\mathcal{C}$.
(b) Si determinino i punti di flesso della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$, verificando che sono allineati, e si calcoli l'equazione di una retta che li contiene.