Corso di Laurea in Matematica - Esame di Geometria 3

Prova scritta del 3 luglio 2017

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

Numero di matricola ____

Correzione:

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Voto

Esercizio 1 *(9 punti)* Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare con sostegno contenuto in una sfera di raggio $R > 0$. Sia $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ la curvatura di σ. Mostrare che

$$\kappa(t) \geq \frac{1}{R}$$

per ogni $t \in I$.

Esercizio 2 *(12 punti)* Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^3 + y^2 - z = 1\}.$$

(i) Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile.

(ii) Determinare l'unico punto $p_0 \in S$ tale che $T_{p_0}S$ sia il piano xy.

(iii) Fissata una mappa di Gauss $N\colon S \to S^2$, calcolare $dN_{p_0}(e_1)$ e $dN_{p_0}(e_2)$, dove $\{e_1, e_2\}$ è la base canonica del piano xy.

(iv) Scrivere la matrice che rappresenta dN_{p_0} rispetto alla base $\{e_1, e_2\}$, e calcolare le curvature principali, Gaussiana e media di S in p_0.

Esercizio 3 *(10 punti)* Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regolare data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2\},$$

e $R \subset S$ la regione regolare

$$R = \{(x, y, z) \in S \,|\, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}.$$

Fissata un'orientazione per S, calcolare $\int_R d\omega$, dove ω è la 1-forma su $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = e^y dx + e^z dy + x dz.$$