Corso di Laurea in Matematica - Esame di Geometria 3

Prova scritta del 18 luglio 2017 - Versione 1

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

Numero di matricola ____

Correzione:

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Voto

Esercizio 1 *(9 punti)* Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare p.r.l.a., e sia $\mathbf{t}\colon I \to \mathbb{R}^2$ la curva dei versori tangenti a σ. Sia inoltre $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che $\mathbf{t}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ per ogni $s \in I$.

(i) Mostrare che la curvatura orientata $\tilde{k}$ di σ è data da $\theta'(s)$.

Supponiamo d'ora in poi che $\tilde{k}$ sia sempre positiva. Mostrare che:

(ii) θ è, a meno di traslazioni, la lunghezza d'arco della curva $\mathbf{t}$;

(iii) il versore tangente alla curva $\mathbf{t}$ è il versore normale $\mathbf{n}$ alla curva σ;

(iv) la curvatura della curva $\mathbf{t}$ è identicamente $+1$.

Esercizio 2 *(12 punti)* Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^6 + y^4 + 1)^2 - z^2 = 0\}$, e sia $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^6 + v^4 + 1).$$

(i) Mostrare che S è una superficie regolare, e che φ è una parametrizzazione locale di S.

(ii) Calcolare la curvatura gaussiana di S in ogni punto di $\varphi(\mathbb{R}^2)$.

(iii) Mostrare che l'applicazione $f\colon S \to S$ data da $f(x, y, z) = (x, y, -z)$ è un'isometria di S in sé.

(iv) Determinare la natura dei punti di S (ovvero quali punti di S sono ellittici, iperbolici, parabolici o planari).

Esercizio 3 *(10 punti)* Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regolare data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1\}.$$

Fissata un'orientazione su S, calcolare:

(i) l'integrale su S della curvatura gaussiana di S;

(ii) l'integrale su S della 2-forma $\omega = x^2 y dx \wedge dy + e^y z \cos x \, dx \wedge dz + e^y z \sin x \, dy \wedge dz$.