Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 4 settembre 2017

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO ....

Esercizio 1. (7 punti) Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia euclidea e sia $X = \{a, b\}$ un insieme formato da due elementi distinti e dotato della topologia banale. Sia $Y = \mathbb{R} \times X$ lo spazio topologico prodotto.

(1) Scrivere una base per la topologia di Y.

(2) Dire se Y è T_1, se è connesso, e se è compatto.

(3) Consideriamo i seguenti sottospazi di Y:

$$Z = \big((-1, 1) \times \{a\}\big) \cup \big([-2, 2] \times \{b\}\big),$$
$$W = \big((-1, 1) \times \{a\}\big) \cup \big((-2, 2) \times \{b\}\big).$$

Stabilire se Z e W sono compatti.

Esercizio 2. (6 punti) Sia $I = [0, 1]$ l'intervallo chiuso e $J = [0, 1)$ l'intervallo semiaperto. Tutti gli spazi considerati hanno la topologia euclidea.

(1) Sia $f : I \to \mathbb{R}^2$ iniettiva e continua. Dimostrare che f è un omeomorfismo fra I e la sua immagine $f(I)$ (con la topologia di sottospazio).

(2) Trovare un esempio di una funzione $g : J \to \mathbb{R}^2$ iniettiva e continua che NON sia un omeomorfismo fra J e la sua immagine $g(J)$.

Esercizio 3. (5 punti)

1 Siano $f, g : X \to Y$ applicazioni continue, con Y spazio di Hausdorff. Dimostrare che l'insieme $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X.

2 Sia ora $A \subseteq Y$, con Y spazio di Hausdorff. Se A è un retratto di Y, dimostrare che A è chiuso in Y.

Esercizio 4. (4 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,c^{-1}\,a^{-1}\,d\,b\,c\,b\,e^{-1}\,d\,e^{-1}$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 5. (5 punti) Consideriamo le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & -10 & -12 & -4 \\ -4 & 8 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

di polinomio caratteristico $c_A(t) = (t-2)^2(t+2)^2$ e

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

di polinomio caratteristico $c_B(t) = t(t+1)^3$. Le matrici A e B commutano (non si deve verificare questa asserzione). Determinare una base comune di autovettori per A e B.

Esercizio 6. (5 punti)

(1) In $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ consideriamo le coniche di equazione:

$$C_1 \colon\ 4x_0x_1 + 6x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0, \quad C_2 \colon\ x_0^2 + 2x_1^2 + hx_2^2 = 0,$$

dove $h \in \mathbb{C}$ è un parametro. Determinare i valori di h per cui C_1 e C_2 sono proiettivamente equivalenti.

(2) In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ consideriamo le coniche di equazione:

$$C_1 \colon\ 4x_0x_1 + 6x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0, \quad C_2 \colon\ x_0^2 + 2x_1^2 + hx_2^2 = 0,$$

dove $h \in \mathbb{R}$ è un parametro. Determinare i valori di h per cui C_1 e C_2 sono proiettivamente equivalenti.