Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Foglio di esercizi n. 10 – a.a. 2017-18

Questi esercizi non sono da consegnare. Verranno discussi nell'incontro di tutorato di martedì 9 gennaio 2018

Esercizio 1. Consideriamo lo spazio proiettivo n-dimensionale reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e ricordiamo che si può ottenere come il quoziente della sfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica i punti antipodali.

1. Dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto e di Hausdorff (Suggerimento: la compattezza è immediata dalla descrizione come quoziente. Per la proprietà di Hausdorff, utilizzare il teorema 5.14 del Manetti)
2. Sia $g : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ una proiettività. Dimostrare che g è un omeomorfismo (Suggerimento: utilizzare il punto precedente e le proprietà della topologia quoziente).

Esercizio 2. Dimostrare che la retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è omeomorfa alla sfera S^2.

Esercizio 3. Consideriamo il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ e i punti dati, in un sistema di riferimento proiettivo, dalle coordinate omogenee $A = [1 : 0 : 0]$, $B := [1 : 2 : 1]$, $C := [1 : -1 : -1]$ e $D := [1 : 1 : 0]$. Dimostrare che i punti dati sono in posizione generale o spiegare perché non lo sono.

Esercizio 4. Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sul campo K, con coordinate affini (x, y), consideriamo le coniche date dalle equazioni

1. C_1: $y - x^2 = 0$
2. C_2: $xy - 2 = 0$
3. C_3: $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$

Consideriamo l'immersione $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^2$ data da $(x, y) \mapsto [1 : x : y]$ e siano D_1, D_2, D_3 i completamenti proiettivi di C_1, C_2, C_3.

Quali fra le coniche D_i sono proiettivamente equivalenti fra loro e quali no? Rispondere a questa domanda nei due casi $K = \mathbb{R}$ e $K = \mathbb{C}$.

Esercizio 5. Siano A, B due punti del piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ di tutte le circonferenze passanti per A e B (ricordiamo che una conica è una *circonferenza* se passa per i *punti ciclici* $P_1 = [0 : 1 : i]$ e $P_2 = [0 : 1 : -i]$).

1. Dare delle condizioni sui punti A e B in modo che $\mathcal{F}$ sia un fascio di coniche in cui non tutte le coniche sono degeneri.
2. Determinare le coniche degeneri del fascio.
3. Supponiamo che i punti A e B abbiamo coordinate reali. Quali sono le coniche degeneri del fascio che hanno equazione reale?