Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 7 giugno 2018

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Versione 1**

Esercizio 1. (8 punti) Sia

$$K = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1/n,\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

e consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ data da

$$\mathcal{B} = \{(a,b)\} \cup \{(a,b) \setminus K\}$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(a) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è la base per una topologia su $\mathbb{R}$, che chiamiamo la K-topologia.

(b) K è chiuso nella topologia euclidea? È chiuso nella K-topologia?

(c) Dimostrare che la K-topologia è strettamente più fine della topologia euclidea.

(d) Dire se $\mathbb{R}$ con la K-topologia è di Hausdorff.

(e) L'intervallo $[0,1]$ è compatto nella K-topologia? (suggerimento: osservare che la successione $a_n = 1/n$ non ha sottosuccessioni convergenti).

Esercizio 2. (7 punti) Sia $X = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ con determinante non nullo, con la topologia indotta da $\mathbb{C}^{n^2}$.

1. Determinare un sottoinsieme $Y \subset X$ che sia omeomorfo a S^1 e che sia un retratto di X.
2. Mostrare che $\pi(X, x)$ è infinito per ogni $x \in Y$.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a^{-1}\, c\, a^{-1}\, d\, b\, c\, b^{-1}\, e^{-1}\, d\, e^{-1}$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (6 punti) Sia A una matrice quadrata complessa di ordine 5. Supponiamo che esistano tre autovettori di A linearmente indipendenti, e che non ne esistano quattro.

Determinare tutte le possibili forme di Jordan che rispettano le informazioni date. Per ognuna delle forme trovate, indicare il polinomio minimo corrispondente.

Esercizio 5. (6 punti) Sia $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ una proiettività e siano $A, B \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ due punti distinti. Ricordiamo che f è detta *involuzione* se $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$.

(a) Determinare, in un opportuno sistema di coordinate omogenee, tutte le proiettività che hanno A e B come punti fissi.

(b) Dimostrare che esiste un'unica involuzione (diversa dall'identità) che fissa i punti A e B.