Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 26 gennaio 2018

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Versione 2**

Esercizio 1. (7 punti) Nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi si considerino gli insiemi

$$A(n) = \begin{cases} \{n\} & n \text{ dispari} \\ \{n-1, n, n+1\} & n \text{ pari} \end{cases}$$

e sia $\mathcal{B} = \{A(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ la famiglia di tutti gli insiemi $A(n)$.

(a) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è la base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{Z}$.

(b) Determinare la famiglia di tutti gli intorni del punto $\{2\}$ e del punto $\{3\}$.

(c) Dimostrare che $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ non è di Hausdorff.

(d) Dimostrare che $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ non è compatto.

(e) Sia $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dimostrare che l'insieme $C_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ è connesso.

Esercizio 2. (7 punti) Dire quali tra questi spazi topologici (con la topologia euclidea) sono tra loro omotopicamente equivalenti, motivando la risposta:

1. $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
2. $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
3. $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$
4. $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Esercizio 3. (5 punti) Siano S_1 e S_2 le superfici compatte che si ottengono identificando i lati dei poligoni secondo la sequenze

$$W_1 = a\,e^{-1}\,d\,b^{-1}\,a^{-1}\,c\,e\,b\,c^{-1}\,d^{-1}$$

e

$$W_2 = c\,b^{-1}\,c^{-1}\,e\,a^{-1}\,e^{-1}\,d\,b\,d^{-1}\,a$$

Determinare la classe di omeomorfismo di $S = S_1 \sharp S_2$ nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (7 punti) Sia A la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Trovare una matrice invertibile P e una matrice in forma di Jordan J tali che $A = PJP^{-1}$.

Esercizio 5. (6 punti) Consideriamo il seguente fascio di coniche nel piano proiettivo reale:

$$(\lambda + \mu)x^2 - \lambda z^2 + 4(\lambda + \mu)xy - (4\lambda + \mu)yz = 0.$$

1. Determinare i punti base e le coniche degeneri del fascio.

2. Determinare le coniche del fascio tangenti alla retta $x = 0$.