Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 15 febbraio 2018

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Versione 2**

Esercizio 1. (7 punti) Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{R}\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \notin A\}.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$.

(b) Sia $Y = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, determinare la chiusura di Y in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

(c) Dimostrare che la topologia indotta da $\mathcal{T}$ su Y è la topologia discreta.

(d) Dire se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è di Hausdorff.

(e) Dire se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è compatto.

Esercizio 2. (6 punti) Siano A e B due sottospazi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea. Dire se la seguente affermazione è vera o falsa, dando una dimostrazione o un controesempio:
se A e B hanno lo stesso tipo di omotopia, allora i complementari $\mathbb{R}^2 \setminus A$ e $\mathbb{R}^2 \setminus B$ hanno lo stesso tipo di omotopia.

Esercizio 3. (6 punti) Tutte le superfici in questo esercizio sono superfici topologiche connesse e compatte. Per ognuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa giustificando la risposta (dare una dimostrazione o trovare un controesempio).

(a) Se $\chi(S_1) = \chi(S_2) = -18$, allora S_1 e S_2 sono omeomorfe.

(b) Se S_1, S_2, S_3 e S_4 sono superfici a due a due non omeomorfe, allora $S_1 \sharp S_2$ non è omemorfa a $S_3 \sharp S_4$

(c) Esiste una superficie S che ha una suddivisione con 8 vertici, 10 spigoli e 6 facce.

Esercizio 4. (7 punti) Sia A la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcolare $\exp(A)$.

Esercizio 5. (6 punti) Sia $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la proiettività data da

$$f([x_0 : x_1]) = [2x_0 + x_1 : x_0 + 2x_1]$$

(a) Determinare i punti fissi di f (ricordiamo che $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è un *punto fisso* se $f(P) = P$).

(b) Detti A e B i punti fissi di f e $Q = [1 : 2]$, calcolare il birapporto $\beta(A, B, Q, f(Q))$.