Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 18 luglio 2018

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Versione 2**

Esercizio 1. (8 punti) Consideriamo l'insieme $X = [0, 2) \subset \mathbb{R}$ e la famiglia di sottoinsiemi di X:

$$\mathcal{T} = \{[0, a) \mid 0 \leq a \leq 2\}.$$

N.B. per $a = 0$, $[0, 0) = \emptyset$.

(a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.

(b) Dare un esempio di intersezione (arbitraria) di elementi di $\mathcal{T}$ che non appartenga a $\mathcal{T}$.

(c) Dimostrare che la chiusura di $A = [0, 1/2]$ è X e che l'interno di A è $[0, 1/2)$

(d) Dire se $(X, \mathcal{T})$ è connesso.

(e) Dire se $(X, \mathcal{T})$ è compatto.

Esercizio 2. (6 punti) Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea)

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 1\right\}$$

e poniamo

$$X = A \cup B$$

(a) Sia $P = (0, 1) \in X$. Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, P)$.

(b) Dimostrare che B non è un retratto di deformazione di X.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,b\,c\,d\,e\,b^{-1}\,a^{-1}\,d^{-1}\,c^{-1}\,e^{-1}$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (7 punti) Sia A una matrice quadrata complessa 6×6. Dire quali delle seguenti affermazioni possono verificarsi, motivando la risposta:

(a) il polinomio minimo di A è $(t-2)^4$, e l'autospazio relativo a 2 ha dimensione 3;

(b) il polinomio minimo di A è $(t-2)^2(t-3)^3$, e l'autospazio relativo a 3 ha dimensione 3;

(c) A ha polinomio caratteristico $(t-2)^6$ e $A^2 - A - I_6 = 0$;

(d) $A^3 - I_6 = 0$ e A ha degli autovalori non reali.

Esercizio 5. (6 punti) Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con coordinate (x, y), e la sua chiusura proiettiva con le coordinate $(x_0 : x_1 : x_2)$.

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la simmetria rispetto all'asse y. Si estenda f a una proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e se ne trovino i punti fissi. Ci sono rette fisse per F in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?

(2) Si consideri la conica Γ in $\mathbb{R}^2$ di equazione

$$x^2 + y^2 + xy - y = 0.$$

Determinare l'equazione della chiusura proiettiva di Γ, i punti all'infinito di Γ, e indicare a quale famiglia di coniche Γ appartiene.