Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 3 settembre 2018

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Versione 1**

Esercizio 1. (8 punti) Consideriamo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi e per ogni intero positivo o nullo a poniamo

$$B_a = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

e cioè B_a è l'insieme dei multipli (interi) di a. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{B} = \{B_a \mid a \geq 0, a \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è la base di una topologia su $\mathbb{Z}$. Indicheremo questa topologia con $\mathcal{T}$.

(b) Dimostrare che se A è un aperto, non vuoto e finito allora $A = B_0 = \{0\}$.

(c) Dimostrare che $C = \{-1, 1\}$ è chiuso.

(d) Determinare la chiusura di $D = \{2\}$.

(e) Dire se $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ è compatto.

Esercizio 2. (7 punti) Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso e Y uno spazio topologico T_1.

1. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua che è costante su A. Dimostrare che f è costante su tutto X.

Consideriamo adesso la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

e poniamo $X = \mathbb{R}/\sim$ con la topologia quoziente ($\mathbb{R}$ ha la topologia euclidea).

2. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che f è costante.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a^{-1}\, b\, c^{-1}\, d\, e^{-1}\, a\, b^{-1}\, c\, d^{-1}\, e$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (6 punti) Siano A e B due matrici quadrate reali, entrambe diagonalizzabili.

(1) Supponiamo che A e B siano 2×2. Mostrare che A e B sono simultaneamente diagonalizzabili se e solo se o hanno gli stessi autospazi, oppure una delle due matrici è un multiplo dell'identità.

(2) Mostrare con un esempio che la stessa affermazione non è vera per matrici 3×3.

Esercizio 5. (6 punti) Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, con coordinate omogenee $(x_0 : \cdots : x_3)$, si considerino il sottospazio proiettivo S generato dai punti $(1 : 0 : 3 : 2), (3 : 0 : -1 : 0)$, e il sottospazio proiettivo T di equazioni $x_0 - 2x_1 + x_3 = 2x_0 + ax_1 + 2x_3 = 0$, dove a è un parametro reale.

(1) Determinare, al variare di a, le dimensioni di S, T, $S \cap T$, e $S + T$ (il sottospazio proiettivo generato da $S \cup T$).

(2) Posto $a \neq -4$, determinare delle equazioni per $S + T$.