Matematica
I decimali infiniti
PAS - A059 – a.a. 2014/2015

Alberto Albano

13 novembre 2014

1 La notazione decimale

L'introduzione dei numeri decimali come una pratica di calcolo comune può essere fatta risalire al trattato *De Thiende*, pubblicato in olandese nel 1585 a Leida dal matematico fiammingo Simon Stevin (1548–1620) e tradotto da lui stesso in francese nello stesso anno con il titolo *La Disme*. Una traduzione in inglese di Robert Norton apparve nel 1608.

Il titolo completo dell'edizione inglese è:

DISME:
The Art of Tenths,
OR,
Decimall Arithmetike,

Teaching how to performe all Computations
whatsoever, by whole Numbers without
Fractions, by the foure Principles of
Common Arithmeticke: namely, Ad-
dition, Substraction, Multiplication,
and Division.

che spiega come lo scopo dell'opera fosse consentire i calcoli senza l'uso delle frazioni ma solo operando sulle cifre con le solite operazioni aritmetiche.

Versioni dell'edizione inglese e francese si trovano agli indirizzi:
`http://adcs.home.xs4all.nl/stevin/telconst/10ths.html`
e
`http://adcs.home.xs4all.nl/stevin/telconst/10sme.html`

Le frazioni decimali erano stati utilizzate dai cinesi molti secoli prima di Stevin e l'astronomo persiano Al-Kashi (ca. 1380–1429) aveva utilizzato frazioni decimali e sessagesimali con grande facilità nella sua opera *Principi di aritmetica* (Samarcanda, all'inizio del XV secolo), però è stata l'opera di Stevino che ha reso popolari i numeri decimali nella matematica europea.

Non discutiamo qui dei numeri decimali finiti, che di solito non comportano grandi difficoltà, ma vogliamo affrontare la questione delle rappresentazioni decimali *infinite*, sia periodiche che non periodiche.

2 Decimali periodici

La rappresentazione decimale di un numero significa, per esempio

$$345,67 = 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2}$$

Se le sequenza di cifre termina la rappresentazione decimale corrisponde ad una somma finita e non crea problemi di significato. Quando invece abbiamo un decimale infinito (anche periodico) come ad esempio

$$0,\overline{34} = 3 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-4} + \dots$$

si pone il problema del significato dei "puntini": ...

Quello che la notazione sottointende è una somma di *infiniti* addendi, ma questo non è mai reso esplicito né spiegato agli studenti della scuola secondaria (inferiore o superiore) e spesso nemmeno agli studenti universitari al di fuori dei corsi di Matematica, Fisica, Ingegneria, Informatica e pochi altri.

La terminologia corretta è che la rappresentazione decimale infinita di un numero con periodo di lunghezza n corrisponde alla

somma di una serie geometrica di ragione 10^{-n}

In quello che segue cercheremo di spiegare il significato della frase in corsivo e così facendo spiegheremo la regola esposta agli studenti (ma mai giustificata!) per convertire un decimale periodico in una frazione.

Partiamo dall'esempio precedente: in $0,\overline{34}$ il periodo ha lunghezza $n = 2$. Possiamo raggruppare gli addendi a due a due (in generale a n a n) e scrivendo la somma usando le frazioni

$$\frac{34}{100} + \frac{34}{10\,000} + \frac{34}{1\,000\,000} + \dots$$

osserviamo che i denominatori sono tutte potenze di $100 = 10^2 = 10^n$. Scriviamo dunque

$$\frac{34}{100} + \frac{34}{100^2} + \frac{34}{100^3} + \dots$$

e usando la notazione di sommatoria e raccogliendo 34 (cioè le cifre del periodo)

$$0,\overline{34} = 34 \times \left[\frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \dots\right] = 34 \times \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^i$$

Dobbiamo dunque capire cosa significhi

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^i$$

La scrittura è quello che in matematica si chiama una *serie*: una somma (simbolica) di infiniti addendi. A volte una serie può essere sommata e il risultato si chiama la *somma della serie*. È importante notare che non tutte le serie possono essere sommate, cioè dare per risultato un numero.

Dobbiamo ora definire cosa è la somma di una serie. Per ogni valore intero di m possiamo calcolare

$$s_m = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{100}\right)^i$$

cioè la somma dei primi m termini della serie (notare che il limite superiore non è più infinito e quindi la somma è una somma usuale).

Otteniamo in questo modo una *successione* di numeri

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad \ldots, \quad s_m, \quad \ldots$$

che si chiama *successione delle somme parziali.*

Nell'esempio si ha

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{100} = 0,01 \\
s_2 &= \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} = \frac{101}{10000} = 0,0101 \\
s_3 &= \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} = \frac{10000+100+1}{1000000} = \frac{10101}{1000000} = 0,010101 \\
&\ldots \\
s_m &= \cdots = 0,\underbrace{0101\ldots01}_{m \text{ volte}}
\end{aligned}$$

Possiamo considerare ogni termine s_m come una approssimazione del "vero" valore della somma infinita e più m cresce, più ci avviciniamo al valore finale (naturalmente questo non va preso in senso letterale: per ogni valore finito di m che consideriamo, non ci siamo avvicinati all'infinito).

Questo suggerisce di definire la *somma* s della serie come il numero

$$s = \lim_{m\to\infty} s_m$$

Per una serie qualunque è molto difficile (spesso impossibile) calcolare questo limite. Nel caso che stiamo considerando è invece possibile. Per semplificare leggermente il calcolo conviene porre

$$q = \frac{1}{100}$$

e considerare

$$s_m = \sum_{i=1}^{m} q^i$$

Questo ha anche il vantaggio che potremo applicare la formula che troveremo a periodi di lunghezza arbitraria (e non solo di lunghezza 2). La serie indicata, dove tutti gli addendi sono potenze di un numero fissato q si chiama *serie geometrica di ragione* q. Il nome serie geometrica è dovuto al fatto che il rapporto fra due addendi consecutivi è costante (e uguale a q, naturalmente).

Quanto vale

$$s_m = q + q^2 + q^3 + \ldots q^m \ ?$$

Raccogliamo q e osserviamo il prodotto notevole

$$(1 + q + q^2 + \ldots q^{m-1})(1 - q) = 1 - q^m$$

la cui giustificazione è semplice: eseguendo la moltiplicazione indicata si ha

$$\begin{aligned} &1 + q + q^2 + \cdots + q^{m-1} \\ &\quad - q - q^2 - \cdots - q^{m-1} - q^m = 1 - q^m \end{aligned}$$

perché i termini incolonnati si semplificano a due a due. Abbiamo dunque

$$s_m = q + q^2 + q^3 + \dots q^m = q(1 + q + q^2 + \dots q^{m-1}) = q\frac{1 - q^m}{1 - q}$$

Calcoliamo adesso il limite. Qui è essenziale ricordarsi che $q < 1$:

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} q\frac{1 - q^m}{1 - q} = q\frac{1}{1 - q} = \frac{q}{1 - q}$$

perché il termine q^m tende a 0 alla crescita dell'esponente in quanto la base della potenza è minore di 1. Nel caso $q = 1/100$ abbiamo

$$\frac{q}{1 - q} = \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{1}{99}$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{99} = 0,010101\cdots = 0,\overline{01}$$

che è il "limite" delle somme parziali che abbiamo calcolato prima ($s_1 = 0,01$, $s_2 = 0,0101$, $s_3 = 0,010101$, $\dots$).

In conclusione

$$0,\overline{34} = 34 \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{100^i} = \frac{34}{99}$$

La regola generale adesso è chiara: se il periodo ha lunghezza n, si ha

$$q = \frac{1}{10^n}$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n}\right)^i = \frac{q}{1 - q} = \frac{\frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{\frac{1}{10^n}}{\frac{99\dots9}{10^n}} = \frac{1}{\underbrace{99\dots9}_{n \text{ volte}}}$$

e dunque, per esempio

$$0,\overline{143} = \frac{143}{999}, \qquad 0,\overline{654738} = \frac{654738}{999999}, \qquad \dots$$

Notiamo anche che per $n = 1$ si ha

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1}{9}$$

e quindi quando il numero è $0,\overline{9}$ si ha

$$0,\overline{9} = 9 \times \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = 9 \times \frac{1}{9} = 1$$

e quindi è giusto dire che

$$0,\overline{9} = 1$$

e non solo che $0,\overline{9}$ si "avvicina" ad 1. Questo è di solito un punto delicato e difficile da far accettare agli studenti.

Abbiamo quindi giustificato la regola per tutti i casi in cui la parte intera è 0 e non c'è antiperiodo. Chiudiamo ricordando la formula in generale, quando c'è anche parte intera e antiperiodo con un esempio.

La regola dice: la frazione ha

- al denominatore tanti 9 quanti la lunghezza del periodo e tanti 0 quanti la lunghezza dell'antiperiodo;
- al numeratore il numero che si ottiene scrivendo il decimale senza la virgola e il segno del periodo e sottraendo il numero prima del periodo

$$32,687\overline{1234} = \frac{326871234 - 32687}{\underbrace{9999}_{\text{periodo}}\ \underbrace{000}_{\text{antiperiodo}}} = \frac{326\,838\,547}{9999000}$$

È facile spiegare l'origine degli zeri nel denominatore, scrivendo

$$32,687\overline{1234} = \frac{32687,\overline{1234}}{1\,000}$$

Scriviamo ora

$$\begin{aligned}
32687,\overline{1234} &= 32687 + 0,\overline{1234} \\
&= 32687 + \frac{1234}{9999} \\
&= \frac{32687 \times 9999 + 1234}{9999} \\
&= \frac{32687 \times (10000 - 1) + 1234}{9999} \\
&= \frac{(32687 \times 10000 + 1234) - 32687}{9999} \\
&= \frac{(326870000 + 1234) - 32687}{9999} \\
&= \frac{326871234 - 32687}{9999}
\end{aligned}$$

Per tornare alla frazione originaria dobbiamo dividere per 1000 e finalmente

$$32,687\overline{1234} = \frac{326871234 - 32687}{9999000}$$

3 Decimali non periodici

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che un decimale periodico corrisponde ad una frazione con numeratore e denominatore numeri interi. È facile vedere che vale anche l'inverso e cioè

Teorema 3.1. *La rappresentazione decimale di* $\frac{p}{q}$*, dove* p *e* q *sono numeri interi e* $q \neq 0$*, è finita oppure periodica.*

La rappresentazione decimale si ottiene dalla divisione usuale. I resti della divisione per q sono in quantità finita, e precisamente $0, 1, 2, \ldots, q-1$. Se otteniamo, in un passo della divisione, resto 0 il decimale è finito. Altrimenti dopo al più $q-1$ passi un resto si deve ripetere e quindi il decimale è periodico, e la lunghezza del periodo è minore o uguale a $q-1$.

Ricordiamo che i numeri che si ottengono come frazioni con numeratore e denominatore interi di dicono *numeri razionali.*

La domanda che ci poniamo è: esistono numeri non razionali?

La risposta è sì, e questo risultato è usualmente attribuito a Pitagora (o almeno, alla scuola pitagorica). Se consideriamo un quadrato di lato 1, usando il teorema di Pitagora abbiamo che la lunghezza della diagonale è un numero d tale che $d^2 = 2$.

Osserviamo che d rappresenta la lunghezza di un segmento "esistente" (la diagonale del quadrato) e quindi dobbiamo considerarlo un numero e il problema è stabilire che tipo di numero sia.

Certamente d è maggiore di 1 perché è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con i cateti di lunghezza 1, ed è minore di 2 perché se fosse 2 o più, il suo quadrato sarebbe maggiore o uguale a 4.

Dunque $1 < d < 2$ e quindi d non è un numero intero. Resta la possibilità che d sia razionale e quindi che esistano due interi p e q tali che

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = d^2 = 2$$

Questo però non accade. Dimostriamo (come apparentemente fece Pitagora) che

Teorema 3.2. *Siano* p *e* q *interi coprimi, cioè* $\mathrm{MCD}(p,q) = 1$*. Allora*

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 \neq 2$$

Dimostrazione. Per assurdo: siano p e q coprimi tali che $(p/q)^2 = 2$. Possiamo dunque scrivere

$$p^2 = 2q^2$$

e quindi p^2 è *pari.*

Ora, e questo è il punto cruciale della dimostrazione, si ha

$$p^2 \text{ pari} \iff p \text{ pari}$$

Dimostriamolo con cura:

- se p è pari, allora $p = 2h$, dunque $p^2 = 4h^2$ che è divisibile per 4 e quindi per 2 e cioè p^2 è pari.
- se p è dispari, allora $p = 2h + 1$, dunque $p^2 = (2h + 1)^2 = 4h^2 + 4h + 1$ che diviso per 2 dà resto 1 e cioè p^2 è dispari

Ritornando alla dimostrazione, p^2 pari $\implies$ p pari e dunque possiamo scrivere $p = 2h$. Allora l'uguaglianza di partenza diventa

$$(2h)^2 = 4h^2 = 2q^2$$

e dividendo per 2 si ottiene

$$2h^2 = q^2$$

e cioè q^2 è *pari* e, come prima, questo implica che q è pari.

Abbiamo trovato l'assurdo: p e q erano coprimi e quindi non possono essere entrambi pari. Questo dice che p e q non possono esistere. $\square$

Una conseguenza è che la rappresentazione decimale di $d = \sqrt{2}$ non è periodica. Osserviamo che questo risultato non si può ottenere mediante un calcolo approssimato delle cifre decimali di $\sqrt{2}$.