

Corso di Laurea in Matematica - Esame di Geometria 3

Prova scritta del 15 settembre 2017

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_

Numero di matricola \_\_\_\_\_

Voto \_\_\_\_\_

**Correzione:**

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Voto \_\_\_\_\_

**Esercizio 1** (9 punti) Sia  $\sigma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva p.r.l.a. Supponiamo che esistano un punto  $p \in \mathbb{R}^3$  e una funzione  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$\sigma(s) - p = f(s)\sigma'(s) \quad \text{per ogni } s \in (a, b).$$

Mostrare che  $f$  è di classe  $C^\infty$ , e che il sostegno di  $\sigma$  è contenuto in una retta passante per  $p$ .

**Esercizio 2** (12 punti) Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y > 0, z = \log\left(\frac{x + y}{2}\right)\}.$$

- (i) Mostrare che  $S$  è una superficie regolare e orientabile.
- (ii) Sia  $p = (1, 1, 0) \in S$ . Scrivere l'equazione di  $T_p S$  come sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ , e calcolare la curvatura gaussiana di  $S$  in  $p$ .
- (iii) Sia  $\sigma: (0, +\infty) \rightarrow S$  data da  $\sigma(t) = (t, t, \log t)$ . Mostrare che  $\sigma$  è una linea di curvatura per  $S$ .

**Esercizio 3** (10 punti) Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  la superficie regolare

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 + 2\},$$

e sia  $R \subset S$  la regione regolare

$$R = \{(x, y, z) \in S \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Calcolare l'area di  $R$ .