# GEOMETRIA 3

a.a 2015/16

PROVA SCRITTA del 20 Giugno 2016

**[1]** Sia $\gamma(s)$ una curva differenziabile in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata rispetto all'ascissa curvilinea $s$ e supponiamo che la sua curvatura $k(s)$ sia non nulla per ogni $s$. Si consideri la nuova curva

$$\alpha(s) = \gamma'(s).$$

a. (1 punto) Provare che la curva $\alpha$ è regolare.
b. (3 punti) Provare che la curvatura di $\alpha$ è data da

$$\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{k^2}}.$$

c. (3 punti) Trovare l'espressione della torsione di $\alpha$ in termini della curvatura $k$ e della torsione $\tau$ di $\gamma$ e delle loro derivate.

**Soluzione** *(a) La curva $\alpha$ é regolare perché $\alpha'(s) = \gamma"(s)$ e $\|\gamma"(s)\| = k(s)$, che é non nulla per ipotesi.*

*(b) Si osservi anche se $s$ é l'ascissa curvilinea di $\gamma$, ma non lo é piú per $\alpha$. Se indichiamo con $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ il triedro fondamentale di $\gamma$. Per definizione*

$$\alpha'(s) = \gamma"(s) = \mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s).$$

*Utilizzando le formule di Frenet per $\alpha$ si ha*

$$\alpha"(s) = k'(s)\mathbf{n}(s) + k(s)(-k(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s)).$$

*Usando la formula*

$$k_\alpha(s) = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha"(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3},$$

*si ha che la curvatura $k_\alpha(s)$ é data da $\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{k^2}}$.*

*(c) Calcolando $\alpha'''(s)$ e usando la formula*

$$\tau_\alpha(s) = -\frac{\alpha'(s) \wedge \alpha"(s) \cdot \alpha'''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha"(s)\|^2},$$

*si ha che la torsione di $\beta$ é data da*

$$\tau_\beta(s) = \frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{k}\right)}{k\left(1 + \frac{\tau^2}{k^2}\right)}.$$

**[2]** (6 punti) Provare che gli integrali curvilinei di forme chiuse sono invarianti per omotopia.

**[3]** (5 punti) Provare che la controimmagine di un valore regolare di una funzione differenziabile $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.

**[4]** (3 punti) Sia $S$ la parte della sfera $x^2+y^2+z^2 = 25$ che sta sotto il piano $z = 4$. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, xyz)$ e $\mathbf{G} = rot(\mathbf{F})$, usare il Teorema di Stokes per calcolare $\iint_S \mathbf{G} \cdot N\, d\sigma$.

**Soluzione.** *Per usare il teorema di Stokes, dobbiamo determinare il bordo $\mathcal{C} = \partial S$ di $S$. Si ottengono le equazioni del bordo sostituendo $z = 4$ nell'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Il bordo ha quindi equazioni*

$$x^2 + y^2 = 9, \quad z = 4.$$

*Per il Teorema di Stokes*

$$\int_S \mathbf{G} \cdot N d\sigma = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds.$$

*Usando che $\mathcal{C}$ ha equazioni parametriche*

$$\alpha(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4), \quad 0 \le t < 2\pi,$$

*si ha*

$$\int\int_S \mathbf{G} \cdot N d\sigma = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{2\pi} 9 dt = 18\pi.$$

**[5]** (5 punti) Sia $\mathbf{x} : U \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di una superficie regolare $S$ e sia $R = \mathbf{x}(Q)$, con $Q$ regione limitata in $U$. Provare che

$$A(R) = \iint_Q \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|\, dudv$$

non dipende dalla parametrizzazione $\mathbf{x}$.

**[6]** Sia $S$ la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)\,, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

(1) (1 punto) Determinare i punti in cui la parametrizzazione NON è regolare
(2) (2 punti) Calcolare la curvatura Gaussiana di $S$ e giustificare geometricamente il risultato ottenuto.
(3) (3 punti) Scrivere la matrice dell'operatore forma (cioè $-d\mathbf{N}_P$) nel punto $P = \mathbf{x}(1,0)$ e calcolare le curvature principali e le direzioni di curvatura in tale punto.

**Soluzione.**

(1) La parametrizzazione è regolare se i vettori $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ sono linearmente indipendenti o, equivalentemente, se il vettore $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$ è non nullo. Calcolando si ha:

$$\mathbf{x}_u = (\cos v, \sin v, 1), \qquad \mathbf{x}_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$$
$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-u\cos v, -u\sin v, u) = u(-\cos v, -\sin v, 1)$$

e la norma di $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$ vale

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 = 2u^2$$

e quindi $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = 0$ per $u = 0$.

(2) Calcoliamo le derivate seconde:

$$\mathbf{x}_{uu} = (0,0,0), \qquad \mathbf{x}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \qquad \mathbf{x}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

Il vettore normale è $N = \dfrac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$ e possiamo allora calcolare:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 2, \qquad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \qquad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = u^2$$

Notiamo che

$$EG - F^2 = 2u^2 = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2$$

Inoltre

$$l = N \cdot \mathbf{x}_{uu} = 0, \qquad m = N \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0 \qquad n = N \cdot \mathbf{x}_{vv} = \frac{u^2}{\sqrt{2u^2}} = \frac{|u|}{\sqrt{2}}$$

e quindi la curvatura Gaussiana vale

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = 0$$

Ricavando l'equazione cartesiana della superficie si ottiene: $x^2 + y^2 = z^2$ e quindi la superficie è un cono con vertice nell'origine. Dunque è localmente isometrica al piano e perciò la sua curvatura è nulla in ogni punto per il Theorema Egregium.

(3) Nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ l'operatore forma si scrive usando $E$, $F$, $G$, $l$, $m$, $n$ in modo opportuno. Nel punto $P = \mathbf{x}(1,0)$ si ha:

$$E = 2, \quad F = 0, \quad G = 1, \qquad l = 0, \quad m = 0, \quad n = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e quindi

$$a_{11} = \frac{Gl - Fm}{EG - F^2} = 0, \quad a_{12} = \frac{Gm - Fn}{EG - F^2} = 0,$$
$$a_{21} = \frac{Em - Fl}{EG - F^2} = 0, \quad a_{22} = \frac{En - Fm}{EG - F^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La matrice è dunque:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

che è diagonale. Gli autovalori, e cioè le curvature principali, sono 0 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Gli autovettori, e cioè le direzioni principali di curvatura, sono rispettivamente $v_1 = (1,0) = \mathbf{x}_u$ e $v_2 = (0,1) = \mathbf{x}_v$.