Tori complessi, varietà abeliane e varietà proiettive irregolari.

Rita Pardini

UNIVERSITÀ DI PISA

Seminario Math-Lab
Università di Torino,
21 giugno 2018

1. Varietà compatte Kähler
2. Varietà irregolari: il toro di Albanese
3. Fibrati lineari I: il gruppo di Picard
4. Fibrati lineari II: applicazioni a valori nello spazio proiettivo
5. Fibrati lineari III: studio asintotico
6. Il teorema di fattorizzazione eventuale

Varietà compatte Kähler

Una varietà compatta Kähler è il dato di:

- una varietà complessa compatta X di dimensione n
- una metrica Kähler, cioè una forma Hermitiana h di classe $\mathcal{C}^\infty$ sui vettori tangenti che localmente nell'intorno di ogni punto $x \in X$ si può scrivere:

$$h\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right) = \delta_{ij} + O(\| z \|^2)$$

NOTA: Applicazione = applicazione olomorfa
Esempio 1:

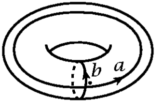
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (Fubini-Study metric)
- sottovarietà chiuse $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ("varietà proiettive lisce"). Es.: superfici di Riemann compatte/curve algebriche.

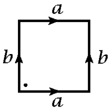
Esempio 2: V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione q, $\Lambda \subset V$ un reticolo, cioè $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2q}$ e $< \Lambda >_{\mathbb{R}} = V$.
$T := V/\Lambda$ è un toro complesso.

- l'applicazione quoziente $p\colon V \to T$ induce su T una struttura di varietà complessa compatta
- una qualunque forma Hermitiana definita > 0 su V induce una metrica Kähler su T

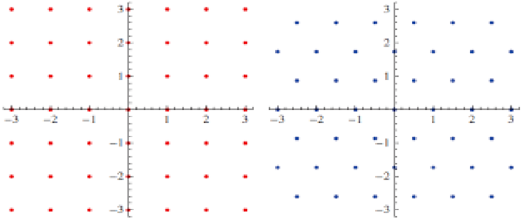
Nota: su $\mathbb{R}$ si può identificare $\Lambda \subset V$ con $\mathbb{Z}^{2q} \subset \mathbb{R}^{2q}$, quindi $T \cong (S^1)^{2q}$ come varietà $\mathcal{C}^\infty$.

$q = 1$





La struttura complessa varia in modo continuo con Λ.



La geometria di T può essere descritta esplicitamente in termini di $\Lambda \subset V$.

Una varietà abeliana è un toro complesso che è anche una varietà proiettiva.

Relazioni bilineari di Riemann

$T = V/\Lambda$ è una varietà abeliana se e solo se esiste una forma Hermitiana H definita positiva su V tale che $\mathrm{Im} H(\Lambda, \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$.

Definizione: H come sopra è detta polarizzazione.

Varietà irregolari: il toro di Albanese

L' irregolarità di X è $q(X) = h^0(X, \Omega^1_X)$ ("numero di 1-forme differenziali olomorfe independenti su X"); X è irregolare se $q(X) > 0$.

Dato un toro complesso $T = V/\Lambda$, se $z_1, \dots z_q$ sono coordinate su V allora $dz_1, \dots dz_q$ discendono a 1-forme olomorfe independenti su T e $q(T) = q = \dim T$.
Se $f\colon X \to T$ è una applicazione olomorfa (non costante), $\omega_i := f^* dz_i$ sono 1-forme olomorfe, non tutte 0, per cui X è irregolare.
L'applicazione f può essere scritta localmente in un intorno di $x_0 \in X$ come

$$x \mapsto (\int_{x_0}^{x} \omega_1, \dots, \int_{x_0}^{x} \omega_q)$$

Globalmente, è necessario dividere per i periodi, che sono gli integrali $(\int_\gamma \omega_1, \dots, \int_\gamma \omega_q)$ su tutti i cammini chiusi γ di X.

Nota: se $\psi_1, \dots \psi_k$ sono 1-forme olomorfe, in generale i periodi $(\int_\gamma \psi_1, \dots, \int_\gamma \psi_k)$ <u>non</u> sono un reticolo in $\mathbb{C}^k$.

<u>Condizione Kähler</u> $\Rightarrow$ si ha un reticolo se si prendono <u>tutte</u> le 1-forme olomorfe:

- sia $V := H^0(X, \Omega^1_X)^\vee$ il duale dello spazio delle 1-forme olomorfe ($\dim V = q(X)$)
- l'immagine $\Lambda \subset V$ della mappa $\pi_1(X) \to V$ definita da $\gamma \mapsto \int_\gamma -$ <u>è un reticolo</u>.

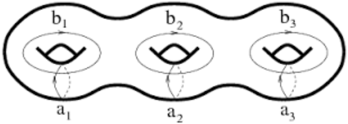
Così abbiamo:

- il toro di Albanese $\mathrm{Alb}(X) := V/\Lambda$
- la applicazione di Albanese $a\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$, $x \mapsto \int_{x_0}^x -$, dove $x_0 \in X$ è un punto fissato.

Proprietà universale: se T è un toro e $f\colon X \to T$ è un'applicazione olomorfa, allora f fattorizza in maniera unica come $X \xrightarrow{a} \mathrm{Alb}(X) \to T$.

Se X è proiettiva, $\mathrm{Alb}(X)$ ha una polarizzazione H, ed è quindi una varietà abeliana.

Se $\dim X = 1$ e X ha genere $g > 0$ (X è una “ciambella con g buchi”)

$g = 3$ 

si ha $q(X) = g$, $\mathrm{Alb}(X) = J(X)$ è la Jacobiana e:

- $a \colon X \to J(X)$ è un embedding
- $J(X)$ ha una polarizzazione canonica Θ e $(J(X), \Theta)$ determina X (teorema di Torelli).

La storia è molto più complicata in dimensione superiore.

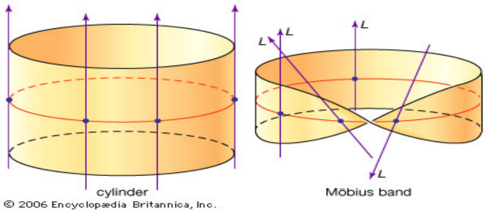
Fibrati lineari I: il gruppo di Picard

Un fibrato lineare (olomorfo) L su X è una varietà complessa con una mappa olomorfa $\pi\colon L \to X$ tale che:

- per ogni $x \in X$, $L_x := \pi^{-1}(x)$ è uno spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbb{C}$
- X è coperta da aperti U su cui si ha:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbb{C} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ U \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & U \end{tikzcd}$$

e l'identificazione $L_x \cong \{x\} \times \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$-lineare per ogni $x \in U$.



Si possono definire le operazioni dell'algebra lineare "fibra per fibra" sui fibrati lineari. In particolare:

- dati L, M fibrati lineari su $X \Rightarrow L \otimes M$ è un fibrato lineare
- il duale $L^\vee$ è ancora un fibrato lineare
- $L \otimes L^\vee$ è isomorfo al fibrato banale $L_0 := X \times \mathbb{C}$
- $L \otimes L_0$ è isomorfo a L

Usando queste operazioni si definisce il gruppo di Picard

$$\mathrm{Pic}(X) := \{\text{fibrati lineari su } X\}/\cong .$$

Consideriamo il sottogruppo:

$$\mathrm{Pic}^0(X) := \{[L] \in \mathrm{Pic}(X) \mid L \cong X \times \mathbb{C} \text{ come fibrati } \underline{\mathcal{C}^\infty}\}$$

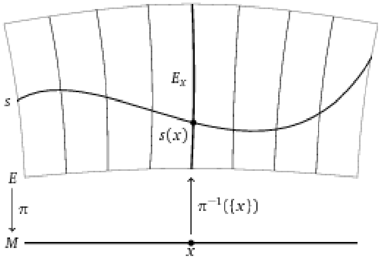
Se $X = T = V/\Lambda$ è un toro:

- sia $V' := \{\phi\colon V \to \mathbb{C} \mid \phi \text{ è antilineare}\}$ e sia $\Lambda' := \{\phi \in V' \mid \mathrm{Im}\phi(\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\}$;
- Λ' è un <u>reticolo</u> e $T^\vee := V'/\Lambda'$ è il toro duale
- c'è un isomorfismo naturale $T^\vee \cong \mathrm{Pic}^0(T)$.

Se X è una varietà Kähler qualunque, $\mathrm{Pic}^0(X)$ è il toro duale di $\mathrm{Alb}(X)$, quindi anche $\mathrm{Pic}^0(X)$ è un <u>toro di dimensione $q(X)$</u>.

Fibrati lineari II: applicazioni nello spazio proiettivo

Una sezione (globale) of L è $s\colon X \to L$ tale che $\pi \circ s = \mathrm{Id}_X$.



Le sezioni di un fibrato lineare L sono uno spazio vettoriale $H^0(X, L)$ su $\mathbb{C}$ <u>di dimensione finita</u> $h^0(X, L) < \infty$.

Sia $s_0, \dots s_N \in H^0(X, L)$ una base; localmente su $U \subset X$ si ha $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{C}$ e la restrizione $s_{i|U}$ può essere scritta

$$x \overset{s_i}{\mapsto} (x, f_i), \text{ con } f_i \text{ olomorfa;}$$

se si cambia l'identificazione $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{C}$ tutte le f_i vengono moltiplicate per la stessa funzione olomorfa mai nulla su U.

Quindi se $f_{i_0}(x) \neq 0$ per qualche indice i_0, il punto $[f_0(x), \dots f_N(x)] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ è <u>ben definito</u>.

Otteniamo una applicazione razionale (meromorfa) $\varphi_L \colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$

Esempi:

- $L = X \times \mathbb{C}$, $H^0(X, L) = \mathbb{C}$, φ_L è l'applicazione costante
- $L = \omega_X$ il fibrato canonico, le cui sezioni globali sono le n-forme olomorfe, φ_L è l' applicazione canonica .
- su $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ abbiamo il fibrato tautologico M tale che per ogni $[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ abbiamo $M_{[x]} =< x >\subset \mathbb{C}^{n+1}$;
  $L := M^\vee$ il fibrato iperpiano , $H^0(X, L) =< x_0, \dots x_N >$, φ_L è l'identità.

Fibrati lineari III: studio asintotico

Sia X liscia e proiettiva.
Un fibrato lineare $L \in \mathrm{Pic}(X)$ è **big** se per $d \gg 0$, l'applicazione razionale

$$\phi_{L^{\otimes d}} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$$

dà un embedding di un aperto di Zariski $U \subset X$ (U è il complementare di una sottovarietà chiusa $Y \subset X$).

X si dice **di tipo generale** se ω_X è big.

La **dimensione di Iitaka $\kappa(L)$** di L è il massimo delle dimensioni di $\mathrm{Im}\phi_{L^{\otimes d}}$ per $d \in \mathbb{N}$. L è big se e solo se $\kappa(L) = \dim X$.
In generale, i risultati asintotici descrivono il comportamento delle potenze $L^{\otimes d}$ di L per $d \gg 0$.

Teorema (La fibrazione di Iitaka)

Sia $h^0(X, L^{\otimes d}) > 0$ *per* $d \gg 0$ *e sia* $\varphi_d := \varphi_{L^{\otimes d}}$.
Si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} X_\infty \arrow[r, "u_\infty"] \arrow[d, "\varphi_\infty"] & X \arrow[d, dashed, "\varphi_d"] \\ Y_\infty \arrow[r, dashed, "u_d"] & Y_d \end{tikzcd}$$

dove $\dim Y_\infty = \kappa(L)$ *e*

- u_∞ *è birazionale e* u_d *è birazionale per* $d \gg 0$
- $\varphi_\infty \colon X_\infty \to Y_\infty$ *ha fibre connesse*
- *se* F *è una fibra molto generale di* u_∞, *allora* $\kappa(L_\infty|F) = 0$, *dove* $L_\infty := u_\infty^* L$.

Nota: Le applicazioni φ_d si stabilizzano asintoticamente e danno φ_∞; questo è un ulteriore modo di associare a un fibrato lineare L un'applicazione. Tuttavia, se L è big φ_∞ è un isomorfismo birazionale e quindi non dà informazioni.

Il teorema di fattorizzazione eventuale

Da qui in poi parlerò di un recente lavoro in collaborazione con Miguel Ángel Barja e Lidia Stoppino.

X varietà complessa liscia e proiettiva, $a\colon X \to A$ un'applicazione a valori in una varietà abeliana tale che:

- $\dim a(X) = n = \dim X$
- $\mathrm{Pic}^0(A) \to \mathrm{Pic}^0(X)$ è iniettiva (identifichiamo $\mathrm{Pic}^0(A)$ con un sottotoro di $\mathrm{Pic}^0(X)$)

Poniamo $q := \dim A$ e fissiamo $L \in \mathrm{Pic}(X)$.

Esempio importante:

X di dimensione di Albanese massima, $a\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$ l'applicazione di Albanese, $L = \omega_X$.

Sia d un intero e sia $\mu_d \colon A \to A$ la moltiplicazione per d; si ha un diagramma Cartesiano

$$\begin{array}{ccc} X^{(d)} & \xrightarrow{\widetilde{\mu_d}} & X \\ {\scriptstyle a_d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ A & \xrightarrow{\mu_d} & A \end{array}$$

Nota: μ_d and $\widetilde{\mu_d}$ sono rivestimenti topologici connessi di grado d^{2q}.

Sia $L^{(d)} := \widetilde{\mu_d}^{*} L$; vogliamo studiare la mappa data da $L^{(d)} \otimes \alpha$ per $\underline{d \gg 0}$ e $\alpha \in \mathrm{Pic}^0(A)$ $\underline{\text{generale}}$.

Definiamo un invariante numerico, il rango continuo (rispetto ad a):

$$h^0_a(X, L) := \min\{h^0(X, L \otimes \alpha) \mid \alpha \in \mathrm{Pic}^0(A)\}.$$

Proprietà moltiplicativa:

$$h^0_{a_d}(X^{(d)}, L^{(d)}) = d^{2q} h^0_a(X, L)$$

Osservazione chiave (Barja):

se $h^0_a(X, L) > 0$, allora $L^{(d)}$ dà un'applicazione genericamente finita per $d \gg 0$. In particolare, L è big.

Teorema (Fattorizzazione eventuale)

Se $h^0_a(X, L) > 0$, c'è un'applicazione <u>*genericamente finita*</u> *$\varphi \colon X \dashrightarrow Z$ (l'applicazione eventuale) tale che:*

(a) *l'applicazione a fattorizza come $X \overset{\varphi}{\dashrightarrow} Z \dashrightarrow A$*

(b) *si consideri il diagramma Cartesiano:*

$$\begin{tikzcd} X^{(d)} \arrow[r, dashed, "\varphi^{(d)}"] \arrow[d, "\widetilde{\mu_d}"] & Z^{(d)} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & A \arrow[d, "\mu_d"] \\ X \arrow[r, dashed, "\varphi"] & Z \arrow[r, dashed] & A \end{tikzcd}$$

$|L^{(d)} \otimes \alpha|$ è <u>*birazionalmente equivalente*</u> *a $\varphi^{(d)}$ per $d \gg 0$ e α generale*

Formalmente l'applicazione eventuale ha forti analogie con la fibrazione di Iitaka; tuttavia è un invariante <u>più fine</u>, dato che può avere grado > 1.

L'applicazione paracanonica eventuale

Per $L = K_X$ e $A = \mathrm{Alb}(X)$,
abbiamo l'applicazione paracanonica eventuale φ_X.

Questo è un nuovo oggetto geometrico intrinsecamente associato a X: abbiamo esempi in cui ϕ_X dà una fattorizzazione non banale dell'applicazione di Albanese a.