Corso di Laurea in Matematica - Esame di Geometria 3

Prova scritta del 18 luglio 2018 - versione 1

Cognome ______________________ Nome ______________________

Numero di matricola ______________________________________

Correzione:

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Voto

Esercizio 1 *(9 punti)* Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da

$$\sigma(t) = (3t-2, t^2+1, 2\cos t).$$

(1) Mostrare che σ è una curva biregolare.

(2) Per $t=0$, calcolare il triedro di Frenet, la curvatura e la torsione di σ.

Esercizio 2 *(11 punti)*

(1) Sia $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ il grafico $z = f(x,y)$ di una funzione $\mathcal{C}^\infty$ su un aperto di $\mathbb{R}^2$. Mostrare che per ogni $p \in S_1$, il piano tangente T_pS_1 non contiene l'asse z.

(2) Sia $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e $p_0 \in S_2$ un punto tale che il piano tangente $T_{p_0}S_2$ non contiene l'asse z. Sia $\pi\colon S_2 \to \mathbb{R}^2$ data da $\pi(x,y,z) = (x,y)$. Mostrare che π è un diffeomorfismo tra un intorno aperto V di p_0 in S_2 e un intorno aperto U di $\pi(p_0)$ in $\mathbb{R}^2$.

(3) *Prosegue dal punto (2):* mostrare che V è il grafico $z = g(x,y)$ di una funzione $\mathcal{C}^\infty$ su U.

Esercizio 3 *(11 punti)* Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regolare data da

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2 + z^2\},$$

e $R \subset S$ la regione regolare

$$R = \{(x,y,z) \in S \mid z \geq 0,\ x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Orientiamo S in modo tale che il versore normale in $(0,0,0)$ sia $(0,-1,0)$.
Sia infine $\omega = y^2dx + (x-z)dy$. Calcolare $\int_R d\omega$ con il teorema di Stokes.