Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta dell'1 febbraio 2017

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Compito n. 1**

Esercizio 1. (7 punti) Nell'insieme $\mathbb{N}_+$ degli interi naturali positivi si consideri la famiglia di insiemi

$$\mathcal{B} = \{\{2n-1, 2n\} \mid n \in \mathbb{N}_+\}\,.$$

(NOTA BENE: $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$).

(a) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è la base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{N}_+$ e si determini la chiusura dell'insieme $\{10, 11, 12, 13\}$.

(b) Dimostrare che $\{7\}$ non è un sottoinsieme chiuso.

(c) Dimostrare che $(\mathbb{N}_+, \mathcal{T})$ non è di Hausdorff e si dia un esempio di sottoinsieme compatto ma non chiuso.

(d) Determinare le componenti connesse per archi di $(\mathbb{N}_+, \mathcal{T})$.

Esercizio 2. (6 punti) In $\mathbb{R}^2$, con la topologia euclidea, consideriamo i seguenti sottoinsiemi:

- $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$
- $F = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$

Per ognuno dei seguenti spazi topologici dire se è di Hausdorff, compatto, connesso, connesso per archi, motivando la risposta:

(a) $X = \mathbb{R}^2/C$

(b) $Y = \mathbb{R}^2/(C \cup F)$

(c) $W = \mathbb{R}^2/F$

Esercizio 3. (4 punti) Sia $e : \mathbb{R} \to S^1$ la mappa esponenziale

$$e(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

e si consideri il cammino $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ definito da

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{1}{4} + 3t.$$

(a) Si verifichi che $\tilde{\alpha}$ induce un cappio α in S^1 con punto base $p = (0, 1)$.

(b) Si determini il sottogruppo di $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$ generato dalla classe di α.

Esercizio 4. (4 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,c\,a\,d\,b\,c\,b\,e\,d\,e$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 5. (6 punti) Siano $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$. Per $n \geq 2$ sia $M = M_n(a,b)$ la matrice $n \times n$ che ha a sulla diagonale principale e b in tutti gli elementi fuori dalla diagonale. Per esempio

$$M_2(a,b) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad M_3(a,b) = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

(a) Dimostrare che $\lambda_1 = a - b$ è un autovalore di M di molteplicità **geometrica** $n-1$

(b) Dimostrare che $\lambda_2 = a + (n-1)b$ è un autovalore di M di molteplicità **geometrica** 1

(c) Usare i risultati precedenti per determinare il polinomio caratteristico $c_M(t)$ e il polinomio minimo $m_M(t)$

(d) Trovare la forma di Jordan J di M e una matrice invertibile P tale che $M = PJP^{-1}$

Esercizio 6. (5 punti) Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si considerino i punti:

$$A_1 = [1:0],\ A_2 = [1:1],\ A_3 = [1:4],\ A_4 = [0:1],$$
$$B_1 = [3:1],\ B_2 = [1:0],\ B_3 = [0:1],\ B_4 = [3:k]$$

dove k è un parametro reale.

(a) Determinare i valori di k per cui esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che $f(A_i) = B_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

(b) Per i valori di k trovati, mostrare che f è unica e determinarla.