Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 4 luglio 2017

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO ....

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}_e$ l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea e sia $\mathbb{R}_c$ l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia cofinita.

(a) (3 punti) In $\mathbb{R}_e \times \mathbb{R}_c$ con la topologia prodotto, si consideri il sottoinsieme $Q = A \smallsetminus B$ dove

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}_e \times \mathbb{R}_c \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\},$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}_e \times \mathbb{R}_c \,|\, 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}.$$

Determinare l'interno, la chiusura e la frontiera di Q.

(b) (2 punti) Stabilire se la funzione $f\colon \mathbb{R}_e \times \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_e \times \mathbb{R}_c$ data da $f(x, y) = (y, x)$ è un omeomorfismo.

(c) (2 punti) Stabilire se la funzione $g\colon \mathbb{R}_e \times \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c \times \mathbb{R}_e$ data da $g(x, y) = (y, x)$ è un omeomorfismo.

Esercizio 2. (4 punti) Una funzione continua $f : X \to Y$ è detta *propria* se per ogni compatto $K \subseteq Y$ la controimmagine $f^{-1}(K)$ è compatta.

Sia ora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua propria (la topologia su $\mathbb{R}$ è quella euclidea). Dimostrare che $f(\mathbb{N})$ non è limitato.

Esercizio 3.

(a) (2 punti) Dare un esempio di due spazi topologici X, Y e una funzione continua *iniettiva* $f : X \to Y$ per cui l'omomorfismo indotto fra i gruppi fondamentali $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ *non* sia iniettivo.

(b) (2 punti) Dare un esempio di due spazi topologici X, Y e una funzione continua *suriettiva* $f : X \to Y$ per cui l'omomorfismo indotto fra i gruppi fondamentali $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ *non* sia suriettivo.

(c) (2 punti) Sia ora $f : X \to Y$ continua e *biiettiva.* L'omomorfismo indotto $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ è sempre biiettivo? (dimostrare o trovare un controesempio).

Esercizio 4. (5 punti) Per ogni *triangolazione* (cioè tutte le facce sono *triangoli*) di una superficie compatta connessa X con f facce (triangoli), e spigoli e v vertici, dimostrare le seguenti relazioni:

(a) $3f = 2e$

(b) $e = 3(v - \chi)$

(c) $v \geq \dfrac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2}$

dove χ è la caratteristica di Eulero di X: $\chi = f - e + v$.
Suggerimento per l'ultima diseguaglianza: osservare che il numero e di spigoli è minore o uguale al numero delle coppie di vertici.

Esercizio 5. (5 punti) Sia A una matrice complessa con polinomio caratteristico $c(t) = (t-3)^2(t-4)^3$. Determinare le possibili forme canoniche di Jordan di A, e per ciascuna di esse indicare il corrispondente polinomio minimo.

Esercizio 6. (5 punti) Determinare l'equazione della conica nel piano proiettivo complesso passante per i punti:

$$(1:0:0),\ (0:1:1),\ (0:0:1),\ (1:1:0),\ (1:-1:1).$$