Corso di Laurea in Matematica - Esame di Geometria 3

Prova scritta del 4 settembre 2018

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

Numero di matricola ____

Esercizio 1 *(11 punti)* Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva piana parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e supponiamo che esista un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ equidistante da tutte le rette tangenti a σ. Mostrare che il sostegno di σ è un segmento o un arco di circonferenza.

Esercizio 2 *(11 punti)* Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'ellissoide di equazione

$$\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{5}y^2 + z^2 = 1,$$

e $\varphi\colon (0,\pi) \times (-\pi,\pi) \to S$ l'applicazione data da

$$\varphi(u,v) = (3\sin u \cos v, \sqrt{5}\sin u \sin v, \cos u).$$

(1) Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile.

(2) Mostrare che φ è una parametrizzazione locale per S.

(3) Mostrare che il punto

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(3,0,1)$$

è un punto ombelicale per S.

Esercizio 3 *(9 punti)* Consideriamo le forme differenziali su $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha = \sin v\, du + e^u dv, \qquad \beta = \frac{1}{1+u^2} du \wedge dv,$$

e l'applicazione $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $F(x,y,z) = (xy, ze^x)$.

(i) Calcolare $\omega = F^*\alpha$ e $\eta = F^*\beta$.

(ii) Calcolare $\omega \wedge \eta$.

(iii) Calcolare $d\omega$ e $d\eta$.