

Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 2 – a.a. 2018-19

Da consegnare: martedì 23 ottobre 2018

Esercizio 1. Due sottoinsiemi A e B di uno spazio topologico si dicono *aderenti* se

$$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \neq \emptyset$$

(cioè se la chiusura di almeno un insieme interseca l'altro).

Dimostrare che una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ preserva la relazione di aderenza, cioè per ogni coppia di insiemi $A, B \subseteq X$ aderenti le immagini $f(A)$ e $f(B)$ sono aderenti (le funzioni continue non “strappano” lo spazio).

Viceversa, dimostrare che se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione fra spazi topologici **T1** che preserva la relazione di aderenza allora f è continua.

Suggerimento: (studiare ed) usare il Lemma 3.25.

Esercizio 2. Siano X, Y spazi topologici, $A \subseteq X, B \subseteq Y$ sottoinsiemi. Dimostrare che

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

In particolare, il prodotto di due chiusi è chiuso nel prodotto.

Suggerimento: Per prima cosa dimostrare che:

Lemma. Siano X, Y spazi topologici, $x \in X, y \in Y$ e siano $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un sistema fondamentale di intorni di x e $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un sistema fondamentale di intorni di y . Poniamo $W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq X \times Y$. Allora:

$$\mathcal{W} = \{W_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$$

è un sistema fondamentale di intorni di $(x, y) \in X \times Y$.

Esercizio 3. Dimostrare che uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se per ogni suo punto x vale

$$\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} \overline{U}$$

Confrontare questa proprietà con la definizione di spazio **T1** (Esercizio 7 del primo foglio di esercizi)

Esercizio 4. (Esercizio 1 dello scritto del 14 settembre 2016). Sia X un insieme con la topologia dei complementari finiti (un sottoinsieme è aperto se e solo se è l'insieme vuoto oppure il suo complementare è finito). Dimostrare che X è di Hausdorff se e solo se X è finito. In questo caso, qual è la topologia su X ?

Esercizio 5. Considerare le topologie degli esercizi 1–8 del foglio ESERCITAZIONI 1 (vedi Moodle, prima settimana) e per ognuna di esse dire se è di Hausdorff o no.

Suggerimento: A volte le proprietà della topologia illustrate nel testo dell'esercizio suggeriscono subito la risposta.