Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 2 - 15 ottobre 2018

Esercizio 1. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f(A)$ è denso in $f(X)$ (con la topologia di sottospazio).

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso e Y uno spazio topologico T_1. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua che è costante su A. Dimostrare che f è costante su tutto X.

Esercizio 3. Siano X e Y due spazi topologici, con Y di Hausdorff. Dimostrare che se esiste un'applicazione continua ed iniettiva $f : X \to Y$ allora anche X è di Hausdorff.

Esercizio 4. Essere di Hausdorff è una proprietà topologica, e cioè

$$X, Y \text{ omeomorfi } \implies [X \text{ Hausdorff } \iff Y \text{ Hausdorff }]$$

Esercizio 5. Sia A chiuso in X e B chiuso in Y. Allora $A \times B$ è chiuso in $X \times Y$ (cioè il prodotto di chiusi è chiuso).

NOTA BENE: in realtà vale una proprietà più forte e cioè:

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

(secondo foglio di tutorato). La dimostrazione della proprietà più forte è più complicata.

Esercizio 6. Se X e Y sono spazi topologici T_1, allora $X \times Y$ è T_1

Esercizio 7. Dimostrare che

1. Se X è di Hausdorff allora X è T_1
2. X con la topologia dei complementari finiti è T_1, ma è di Hausdorff se e solo se X è finito.

Esercizio 8. Sia X uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ un sottospazio e sia $A \subseteq Y$. Indichiamo con $\mathrm{cl}_X(A)$ la chiusura di A come sottoinsieme di X e con $\mathrm{cl}_Y(A)$ la chiusura di A come sottoinsieme di Y (nella topologia indotta di sottospazio).

1. Dimostrare che $\mathrm{cl}_Y(A) \subseteq \mathrm{cl}_X(A)$.
2. Dare un esempio per mostrare che in generale $\mathrm{cl}_Y(A) \neq \mathrm{cl}_X(A)$.
3. Determinare condizioni *necessarie* e/o *sufficienti* su Y in modo che per ogni $A \subseteq Y$ si abbia $\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A)$.

Esercizio 9. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sull'insieme prodotto $X \times Y$ definiamo

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

1. Dimostrare che d è una distanza su $X \times Y$.

2. Dimostrare che la topologia indotta dalla distanza d su $X \times Y$ è la topologia prodotto (cioè il prodotto delle topologie indotte dalle distanze d_X su X e d_Y su Y).

Esercizio 10. Trovare uno spazio topologico non vuoto X tale che X sia omeomorfo a $X \times X$.

Suggerimento: provare con X insieme infinito con la topologia discreta. Funziona anche con la topologia banale? Fatto questo, trovare un X che non abbia la topologia discreta o banale.

Esercizio 11. Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice *localmente costante* se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) = f(x)$ per ogni $y \in U$.

Provare che se X è connesso e $f : X \to \mathbb{R}$ è (continua e) localmente costante, allora f è costante.

Suggerimento: sia $x \in X$ e provare che $f^{-1}(f(x))$ è aperto e chiuso.