Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 10 - 10 dicembre 2018

Esercizio 1. Si mostri che i punti del piano proiettivo reale $(1/2 : 1 : 1)$, $(1 : 1/3 : 4/3)$, $(2 : -1 : 2)$ sono allineati e si trovi l'equazione della retta che li contiene.

Esercizio 2. Si considerino in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ i punti

$$P_1 = [1, 0, 1, 2], \quad P_2 = [0, 1, 1, 1], \quad P_3 = [2, 1, 2, 2], \quad P_4 = [1, 1, 2, 3].$$

(a) Si dica se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.

(b) Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da P_1, P_2, P_3, P_4 e se ne determinino equazioni cartesiane.

(c) Si completi, se possibile, l'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$ ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Siano A, B, C, D punti di $\mathbb{P}^2(K)$ in posizione generale e siano

$$P = L(A, B) \cap L(C, D), \quad Q = L(A, C) \cap L(B, D), \quad R = L(A, D) \cap L(B, C).$$

Si mostri che P, Q, R non sono allineati.

Esercizio 4. Nel piano proiettivo reale, con coordinate omogenee $[x_0 : x_1 : x_2]$, consideriamo la retta r di equazione $x_0 - x_1 = 0$.

Determinare tutte le proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che $f(r) = r$, $f(1 : 0 : 0) = (1 : 0 : 0)$, e $f(2 : 1 : 0) = (2 : 1 : 0)$.

(NOTA BENE: l'insieme r è fissato come insieme e non necessariamente punto per punto)

Esercizio 5. Sia f una proiettività di $\mathbb{P}^1(K)$.

1. Se
$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$
è una matrice associata a f, si verifichi che f è una involuzione (ossia $f^2 = \mathrm{id}$) diversa dall'identità se e solo se $a + d = 0$.

2. Supponiamo che f sia una involuzione diversa dall'identità. Si mostri che f ha esattamente 0 o 2 punti fissi, e che se $K = \mathbb{C}$ ha esattamente 2 punti fissi.

Esercizio 6. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con coordinate (x, y) e la sua chiusura proiettiva con le coordinate $(x_0 : x_1 : x_2)$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la simmetria rispetto all'asse y. Si estenda f a una proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e se ne trovino i punti fissi. Ci sono rette fisse per F in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ una proiettività e siano $A, B \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ due punti distinti.

(a) Determinare, in un opportuno sistema di coordinate omogenee, tutte le proiettività che hanno A e B come punti fissi.

(b) Dimostrare che esiste un'unica involuzione (diversa dall'identità) che fissa i punti A e B.