Istituzioni di Geometria.
Appello del 15.1.2019.

Primo Modulo

[1] (a) Sia f una funzione razionale sul piano affine. Mostrare che se f è definita in ogni punto di $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$, allora f è una funzione polinomiale.
(b) Dare un esempio di una varietà affine X e di una funzione razionale g su X il cui dominio sia $X \setminus \{p\}$, con $p \in X$.

[2] Sia $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{A}^n$ un'applicazione che si restringe a una mappa polinomiale sulle carte affini di $\mathbb{P}^1$. Mostrare che f è costante.

[3] Si dimostri che $\mathbb{R}^3$ con il prodotto vettoriale $\wedge$ è un'algebra di Lie.
Dati i campi su $\mathbb{R}^3$

$$X = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\,, \quad Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\,, \quad Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

si verifichi che $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{X, Y, Z\}$ con l'usuale bracket di spazi vettoriali definisce un algebra di Lie isomorfa a $(\mathbb{R}^3, \wedge)$.

[4] Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale su una varietà differenziabile. Si consideri per ogni $p \in M$, lo spazio vettoriale $\mathrm{End}(E_p)$ degli endomorfismi della fibra E_p. Si dimostri che l'unione disgiunta

$$\bigsqcup_{p \in M} \mathrm{End}(E_p)$$

ha una struttura di fibrato vettoriale su M. Che rango ha? Si trovino le funzioni di cociclo del fibrato.

Secondo Modulo

[5] Sia M una varietà differenziabile. Per ogni $\alpha \in \Omega^r(M)$ vale la seguente formula

$$d\alpha(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j+1} X_j \left(\alpha(X_1, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1})\right) + \sum_{1 \le i < j \le r+1}^{r+1} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1})$$

Si verifichi la formula per 1-forme.

[6] Si consideri la 1-forma differenziale su $\mathbb{R}^4$

$$\alpha = x dy$$

e sia

$$i \colon S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\} \to \mathbb{R}^4$$

l'inclusione. Trovare il sottoinsieme di S^3 dove $i^*\alpha$ si annulla.