Istituzioni di Geometria.
Appello del 5.6.2019.

Primo Modulo

[1] Sia k un campo qualsiasi (anche non algebricamente chiuso).

• Si dimostrino le seguenti affermazioni:

(a) Un punto di $\mathbb{A}^n = k^n$ è un insieme algebrico affine.

(b) Ogni sottoinsieme finito di $\mathbb{A}^n$ è un insieme algebrico affine.

(c) L'insieme $X = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ non è un insieme algebrico affine.

(d) L'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ non è un insieme algebrico affine.

• Si dimostrino le seguenti affermazioni:

(a) Dati n, m interi positivi, dimostrare che il radicale dell'ideale $(x^m, y^n) \subset k[x, y]$ è l'ideale (x, y).

(b) Siano $f, g \in k[x, y]$ polinomi distinti, non costanti. È sempre vero che il radicale dell'ideale $I = (f^2, g^3)$ è (f, g)?

[2] Si dimostri che $\mathbb{CP}^n$ è una varietà differenziabile. Sia

$$E = \{([z], \lambda\, z) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \;:\; \lambda \in \mathbb{C}\}\,.$$

Si dimostri che $\pi\colon E \to \mathbb{CP}^n$, $\pi([z], \lambda\, z) = [z]$ è un fibrato vettoriale e si trovino delle funzioni di transizione.

Secondo Modulo

[3] Si consideri il gruppo speciale lineare $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \;:\; \det(A) = 1\}$.

1. Provare che $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ è una sottovarietà embedded di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Qual è la sua dimensione?

2. Provare che lo spazio tangente a $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ nell'identità è dato dalle matrici di $n \times n$ aventi traccia nulla e determinare esplicitamente una sua base.