Giovedì 28/02/2019

Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare param. per arcolunghezza, cioè $|\alpha'(s)| \equiv 1$

Abbiamo definito la curvatura

$$k(s) = |\alpha''(s)|$$

ma dobbiamo verificare che sia una proprietà geometrica e cioè non dipenda dal rappresentante. Supponiamo allora

$$\begin{tikzcd} I_s \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R}^3 \\ J_\sigma \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$\sigma = \varphi(s)$ diffeo

$\alpha(s) = \beta(\varphi(s)) = \beta(\sigma)$

se $\alpha(s)$, $\beta(\sigma)$ sono entrambe param. x arcolunghezza si ha

$$1 \equiv \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \left| \frac{d\beta}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds} \right| = \left| \frac{d\beta}{d\sigma} \right| \cdot |\varphi'(s)|$$

e poiché $\left|\frac{d\beta}{d\sigma}\right| \equiv 1$ si ha:

$$|\varphi'(s)| \equiv 1 \quad \text{e cioè} \quad \varphi'(s) = \pm 1, \quad \forall s \in I$$

ma poiché $\varphi'(s)$ è continua, deve essere costante.

Integrando, si ottiene

$$\sigma = \varphi(s) = \pm s + c \,, \qquad c \in \mathbb{R}$$

<u>Definizione</u> se $\alpha(t)$, $\beta(\tau)$ sono curve param. equivalenti, $\tau = \varphi(t)$ e $\alpha(t) = \beta(\varphi(t))$ si dice che

- α e β <u>hanno la stessa orientazione</u> se $\varphi'(t) > 0 \quad \forall t \in I$
- α e β <u>hanno orientazione opposta</u> se $\varphi'(t) < 0 \quad \forall t \in I$

Nel caso $\alpha(s)$, $\beta(\sigma)$ param. per arco lunghezza si ha

- stessa orientazione : $\alpha'(s) = \beta'(\sigma)$
  $\alpha''(s) = \beta''(\sigma)$

- orientazione opposta : $\alpha'(s) = -\beta'(\sigma)$
  $\alpha''(s) = \beta''(\sigma)$

In particolare, $\alpha''(s)$ e $k(s)$ sono invarianti per cambiamento di parametro (invece il vettore tangente cambia verso)

<u>Definizione</u> α si dice <u>biregolare</u> se è regolare e $k(s) > 0 \quad \forall s \in I$.

In questo caso possiamo definire un vettore di norma 1

$$\underline{n}(s) = \frac{1}{k(s)} \cdot \alpha''(s) \quad = \text{vettore } \underline{\text{normale}}$$

mentre diciamo

$$\underline{t}(s) = \alpha'(s) \quad = \text{vettore } \underline{\text{tangente}}$$

<u>Nota</u>: se $\underline{v}(t)$ è una funzione vettoriale di <u>norma</u> costante, allora $\underline{v}(t) \perp \underline{v}'(t) \ \forall t$

Infatti: $\underline{v}(t) \cdot \underline{v}(t) = c$ (costante)

e derivando si ottiene:

$2\, \underline{v}(t) \cdot \underline{v}'(t) \equiv 0$ cioè $\underline{v}(t) \perp \underline{v}'(t)$

Dunque $\underline{t}(s)$ e $\underline{n}(s)$ sono ortogonali $\forall s$

Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva param per arcolunghezza <u>biregolare</u>. Possiamo definire, $\forall s \in I$, una terna <u>ortonormale</u>:

$\underline{t}(s) = \alpha'(s)$ vettore <u>tangente</u>

$\underline{n}(s) = \frac{1}{k(s)} \cdot \alpha''(s)$ vettore <u>normale</u>

$\underline{b}(s) = \underline{t}(s) \wedge \underline{n}(s)$ vettore <u>binormale</u>

I tre vettori $\underline{t}(s)$, $\underline{n}(s)$, $\underline{b}(s)$ formano, per ogni s, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ e vengono detti <u>il triedro di Frenet</u>

$\underline{b}(s)$ è il vettore normale al piano generato da $\underline{t}(s)$ e $\underline{n}(s)$, che viene detto <u>piano osculatore</u>.

<u>Osservazione</u>: se la curva α è contenuta in un piano, allora il piano osculatore è costante e coincide con il piano in cui è contenuta la curva

Infatti, sia $(\underline{x} - P_0) \cdot \underline{b} = 0$

l'equazione del piano in cui è contenuta α ($\underline{b}$ è il vettore $\perp$ al piano)

Allora si ha

$$(\alpha(s) - P_0) \cdot \underline{b} \equiv 0 \qquad \forall s \in I$$

e derivando si ha:

$$\alpha'(s) \cdot \underline{b} \equiv 0 \qquad \forall s$$

$$\alpha''(s) \cdot \underline{b} \equiv 0 \qquad \forall s$$

e quindi i vettori $\underline{t}(s)$ e $\underline{n}(s)$ sono sempre perpendicolari al vettore costante $\underline{b}$ e dunque il piano osculatore è sempre il piano della curva (traslato nell'origine)

In particolare, il vettore binormale $\underline{b}(s)$ è costante.

Ha quindi interesse studiare la variazione di $\underline{b}(s)$, che dovrebbe esprimere di quanto la curva non sia piana.

$$\underline{b}'(s) = \left(\underline{t}(s) \wedge \underline{n}(s)\right)' =$$

$$= \underline{t}'(s) \wedge \underline{n}(s) + \underline{t}(s) \wedge \underline{n}'(s)$$

$$= \underbrace{k(s)\, \underline{n}(s) \wedge \underline{n}(s)}_{=0} + \underline{t}(s) \wedge \underline{n}'(s)$$

$$= \underline{t}(s) \wedge \underline{n}'(s)$$

poiché $\underline{b}(s)$ è di norma costante, sappiamo che $\underline{b}'(s)$ è $\perp$ a $\underline{b}(s)$. Il calcolo precedente mostra che $\underline{b}'(s)$ è $\perp$ $\underline{t}(s)$ e quindi è parallelo a $\underline{n}(s)$.

Possiamo dunque scrivere:

$$\boxed{\underline{b}'(s) = -\tau(s) \cdot \underline{n}(s)}$$

dove $\tau(s)$ è una funzione (C^∞) detta <u>torsione</u>

<u>N.B.</u> Il do Carmo ~~[illegible]~~ usa il segno opposto. Tutti (o quasi) gli altri libri usano invece il segno che abbiamo usato sopra.

<u>Osservazione</u> sia $\alpha(s)$ una curva biregolare. Allora $\alpha(s)$ è piana se e solo se $\tau(s) \equiv 0 \quad \forall s$.

<u>dimostrazione</u>

Abbiamo già visto che α piana $\Rightarrow b(s)$ costante e dunque $\tau(s) \equiv 0$.

Viceversa, se $\tau(s) \equiv 0$ allora $\underline{b}(s) = b$ è costante. Sia $s_0 \in I$, e poniamo $P_0 = \alpha(s_0)$ un punto. ~~Si ha~~

Consideriamo la funzione:

$$g(s) = (\alpha(s) - P_0) \cdot \underline{b}$$

Derivando si ottiene $g'(s) = \alpha'(s) \cdot b \equiv 0$ (perché tangente e binormale sono $\perp$) e dunque $g(s)$ è costante. Poiché

$$g(s_0) = (\alpha(s_0) - P_0) \cdot b = 0$$

$g(s) \equiv 0$ e cioè $\alpha(s)$ è contenuta nel piano $(\underline{X} - P_0) \cdot \underline{b} = 0$

Per ogni $s \in I$, i vettori $\underline{t}(s)$, $\underline{n}(s)$ e $\underline{b}(s)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ e perciò possiamo esprimere ogni vettore come loro combinazione lineare. Sappiamo già:

$$\underline{t}'(s) = k(s)\,\underline{n}(s)$$

$$\underline{b}'(s) = -\tau(s)\,\underline{n}(s).$$

Calcoliamo allora $\underline{n}'(s)$:

da $\underline{b}(s) = \underline{t}(s) \wedge \underline{n}(s)$ si ha:

$$\boxed{\underline{n}(s) = \underline{b}(s) \wedge \underline{t}(s)}$$

e derivando (e non scrivendo la variabile s) si ha:

$$n' = b' \wedge t + b \wedge t' =$$

$$= -\tau\, \underline{n} \wedge \underline{t} + k\, \underline{b} \wedge \underline{n} =$$

$$= \tau\, \underline{b} - k\, \underline{t}$$ (controllare i segni!)

Abbiamo ottenuto le:

Formule di Frenet

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare (param x arco lunghezza) e siano $k(s)$, $\tau(s)$ le funzioni curvatura e torsione. Allora le funzioni vettoriali $\underline{t}(s)$, $\underline{n}(s)$, $\underline{b}(s)$ soddisfano il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \underline{t}' = k\,\underline{n} \\ \underline{n}' = -k\,\underline{t} + \tau\,\underline{b} \\ \underline{b}' = -\tau\,\underline{n} \end{cases}$$

Dal punto di vista scalare, si tratta di un sistema di 9 equazioni in 9 incognite (le componenti delle funzioni vettoriali)

L'importanza di curvatura e torsione è espressa dal seguente teorema, la cui dimostrazione si basa sulle proprietà del sistema di eq. diff. di Frenet:

__Teorema fondamentale__ (della teoria locale delle curve)

Siano date due funzioni $\mathcal{C}^\infty$ $k, \tau : I_s \to \mathbb{R}$ con $k(s) > 0$ $\forall s \in I$.

Allora __esiste__ una curva (biregolare) param. per arco lunghezza $\alpha : I \to \mathbb{R}$ tale che $k(s)$ è la sua curvatura e $\tau(s)$ la sua torsione.

Inoltre, la curva α è __unica__ a meno di isometrie dello spazio $\mathbb{R}^3$, cioè se, $\beta(s)$ è un'altra curva con la stessa curvatura e torsione di $\alpha(s)$ allora esiste una isometria di $\mathbb{R}^3$ (rotazione + traslazione) che porta α su β.

Vedremo la dimostrazione di questo teorema nella prossima lezione.

Dunque curvatura e torsione contengono tutte le informazioni geometriche relative ad una curva.

Purtroppo sono state definite mediante parametrizzazioni per arcolunghezza

Vediamo quindi delle formule che consentono di calcolare curvatura, torsione e triedro di Frenet quando abbiamo una parametrizzazione arbitraria, senza trovare la param x arcolunghezza

Le formule si trovano nell'esercizio 12, paragrafo 1.5 del do Carmo. (pag 25/26)

Svolgiamo qui l'esercizio, che illustra anche l'uso delle formule di Frenet.

$$\begin{tikzcd} I_t \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "s(t)"'] & \mathbb{R}^3 \\ J_s \arrow[ur, "\beta"'] \arrow[u, bend right, "t(s)"'] & \end{tikzcd}$$

dove $\alpha(t) = \beta(s(t))$

e β è param x arcolunghezza.

Indichiamo con un $(\dot{\ })$ la derivata rispetto a t e con $(\ )'$ la derivata rispetto ad s.

Osserviamo che $\boxed{\beta'(s) = \beta' = \underline{t}}$

e che
$$\dot{\alpha}(t) = \beta'(s)\cdot\dot{s}(t) = \dot{s}\,\underline{t}$$

e quindi $\dot{s} = \frac{ds}{dt} = |\dot{\alpha}(t)| =$ velocità scalare

Valgono le seguenti formule:

$$\boxed{\dot{\alpha} = \dot{s}\,\underline{t}}$$

$$\ddot{\alpha} = \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s}\,(\dot{\underline{t}}) = \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s}\,\dot{s}\,\underline{t}' = \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s}^2\,\underline{t}' = \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s}^2 k\,\underline{n}$$

$$\boxed{\ddot{\alpha} = \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s}^2 k\,\underline{n}}$$

da queste due equazioni si ottiene

$$\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} = \dot{s}^3 k \, \underline{b}$$

e passando ai moduli

$$|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}| = \dot{s}^3 k$$

Dunque:

$$\boxed{k = \frac{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3}}$$

(solo derivate rispetto a t).

Per ottenere la torsione, deriviamo ancora

$$\dddot{\alpha} = \dddot{s} \, \underline{t} + \ddot{s} \dot{s} \, \underline{t}'$$

$$+ 2 \dot{s} \ddot{s} k \, \underline{n} + \dot{s}^2 \cdot (\dot{s} k') \, \underline{n}$$

$$+ \dot{s}^2 k \cdot \dot{s} \, \underline{n}' =$$ (usando Frenet)

$$= (\dddot{s} - \dot{s}^3 k) \, \underline{t}$$

$$+ \cancel{(3 \ddot{s} \dot{s} k)} (\dot{s} \ddot{s} k + 2 \dot{s} \ddot{s} k + \dot{s}^3 k') \, \underline{n}$$

$$+ \dot{s}^3 k \tau \, \underline{b}$$

Moltiplicando scalarmente:

$$(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha} = (\dot{s}^3 k \, \underline{b}) \cdot (\cdots)$$

$$= \dot{s}^6 \, k^2 \, \tau$$

e ricavando la torsione:

$$\tau = \frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}}{\dot{s}^6 \cdot k^2} =$$

$$= \frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}}{\cancel{|\dot{\alpha}|^6} \cdot \frac{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}|^2}{\cancel{|\dot{\alpha}|^6}}} = \boxed{\frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}|^2}}$$

Osserviamo ancora che è semplice trovare il triedro di Frenet. Sia come prima $\alpha(t)$ una curva (biregolare) con parametrizzazione arbitraria.

Allora:

$$\underline{t} = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}$$ (chiaro, normalizz. il vettore tangente)

$$\underline{b} = \frac{\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}|}$$ (dal calcolo prec. $\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} = \dot{s}^3 k \, \underline{b}$ è // al vett. binormale)

$$\underline{n} = \underline{b} \wedge \underline{t}$$

—o—