Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3, a.a. 2018/19

Curve con curvatura e torsione assegnate

Alberto Albano

In queste note diamo una dimostrazione del **teorema fondamentale della teoria locale delle curve** (esistenza e unicità a meno di movimenti rigidi di una curva in $\mathbb{R}^3$ con curvatura e torsione assegnate).

La dimostrazione è la stessa che c'è nel libro di do Carmo (Appendice al Capitolo 4), nel libro di Abate-Tovena (Teorema 1.3.37) e nel libro di Postnikov (Lecture 2, Theorem 1, pag. 47).

Questa versione ha qualche dettaglio in più, per migliorare (si spera) la comprensione.

1 Enunciato del teorema

Scopo di questo primo paragrafo è enunciare con precisione il teorema che vogliamo dimostrare. Useremo il termine *differenziabile* come sinonimo di *classe* $\mathcal{C}^\infty$.

Sia $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile, biregolare, parametrizzata per arcolunghezza, e siano $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ i campi vettoriali che costituiscono il triedro di Frenet. Le formule di Frenet

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = & & k(s)\,\mathbf{n}(s) & \\ \mathbf{n}'(s) = & -k(s)\,\mathbf{t}(s) & & +\tau(s)\,\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = & & -\tau(s)\,\mathbf{n}(s) & \end{cases}$$

esprimono le relazioni fra i vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ e le loro derivate mediante due funzioni scalari, la *curvatura* $k(s)$ e la *torsione* $\tau(s)$ definite da

$$k(s) = \|\mathbf{t}'(s)\|$$
$$\tau(s) = -\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)$$

Osserviamo che se poniamo

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

la matrice che ha per *righe* i vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$, le formule di Frenet corrispondono all'uguaglianza di matrici

$$\frac{dQ}{ds} \cdot Q^t = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

Per prima cosa, vediamo che se la curva α è ottenuta da β mediante traslazioni e rotazioni, curvatura e torsione non cambiano. La dimostrazione di questo enunciato è lasciata per esercizio sia sul do Carmo (esercizio 1-5.6) che sull'Abate-Tovena (esercizio 1.25).

Sia $\mathbf{v}$ un vettore fissato: traslare di $\mathbf{v}$ significa considerare $\alpha(s) = \beta(s) + \mathbf{v}$ e poiché le derivate di α e β sono uguali, i vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ non cambiano e di conseguenza anche $k(s)$ e $\tau(s)$ sono le stesse.

Sia ora M una matrice ortogonale ($M^t = M^{-1}$), e consideriamo $\alpha = M\beta$ una rotazione di β (immaginiamo i vettori α e β come vettori *colonna*). Allora i vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ sono soggetti alla stessa rotazione, cioè

$$\mathbf{t}_\alpha = M\mathbf{t}_\beta, \quad \mathbf{n}_\alpha = M\mathbf{n}_\beta, \quad \mathbf{b}_\alpha = M\mathbf{b}_\beta$$

e quindi si ha, con la notazione precedente,

$$Q_\alpha = Q_\beta M^t$$

(ricordiamo che nella matrice Q mettiamo i vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ in riga). Calcolando:

$$\frac{dQ_\alpha}{ds} \cdot Q_\alpha^t = \frac{d(Q_\beta M^t)}{ds} \cdot (Q_\beta M^t)^t = \frac{dQ_\beta}{ds}(M^t M)Q_\beta^t = \frac{dQ_\beta}{ds} \cdot Q_\beta^t$$

e quindi curvatura e torsione non cambiano.

Vogliamo vedere che vale anche il viceversa, e cioè che è sempre possibile trovare una curva con curvatura e torsione assegnate in modo unico (a meno di traslazioni e rotazioni).

L'enunciato preciso che dimostreremo è:

Teorema 1.1 (**Teorema Fondamentale**). *Siano date due funzioni differenziabili $k : I \to \mathbb{R}$ e $\tau : I \to \mathbb{R}$, con $k(s) > 0$ per ogni $s \in I$ e supponiamo $0 \in I$. Per ogni $P_0 \in \mathbb{R}^3$ e ogni base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ orientata positivamente di $\mathbb{R}^3$ esiste una e una sola curva $\beta(s)$ differenziabile, biregolare, parametrizzata per arcolunghezza e definita su tutto l'intervallo I tale che:*

1. *$k(s) =$ curvatura di β, $\tau(s) =$ torsione di β*
2. *$\beta(0) = P_0$, $\mathbf{t}(0) = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{n}(0) = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}(0) = \mathbf{e}_3$*

L'ipotesi di positività per la base ortonormale significa che $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$. Questa ipotesi è chiaramente necessaria, perché il vettore binormale $\mathbf{b}$ è proprio definito come $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$.

Osserviamo anche che tutte le basi ortonormali che hanno matrice di passaggio con la base fissata con determinante positivo saranno orientate positivamente, mentre quelle con matrice di passaggio con determinante negativo saranno orientate negativamente.

La dimostrazione del Teorema 1.1 verrà data nel paragrafo seguente ed è basata in modo essenziale sul teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari. Enunciamo quindi con precisione la versione del teorema che useremo. Trovate questo enunciato (con la dimostrazione) sul Salsa-Pagani, Capitolo 4.2.1, pag. 242, enunciati iii) e iv) oppure sul Barutello-Conti-Ferrario-Terracini-Verzini, Teorema VIII.10, pag. 395.

Teorema 1.2. *Siano $\{a_{ij}(s)\}$ per $i, j = 1, \dots, n$ delle funzioni differenziabili sull'intervallo I e siano $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ numeri reali. Supponiamo anche $0 \in I$. Allora esiste ed è unica una famiglia di funzioni differenziabili $x_1(s), \dots, x_n(s)$ definite su tutto l'intervallo I tali che*

$$\begin{cases} x_1'(s) = a_{11}(s)x_1(s) + a_{12}(s)x_2(s) + \cdots + a_{1n}(s)x_n(s) \\ \quad \vdots = \vdots \\ x_n'(s) = a_{n1}(s)x_1(s) + a_{n2}(s)x_2(s) + \cdots + a_{nn}(s)x_n(s) \end{cases}$$

e

$$x_1(0) = \bar{x}_1, \quad x_2(0) = \bar{x}_2, \quad \dots \quad x_n(0) = \bar{x}_n$$

2 La dimostrazione

La dimostrazione del teorema 1.1 si svolge in tre passi.

2.1 Passo 1: determinare il triedro

Per ipotesi abbiamo le due funzioni $k(s)$ e $\tau(s)$ e una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Scriviamo quindi tre "sistemi di Frenet" di equazioni differenziali per $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_i'(s) = & & k(s)\mathbf{n}_i(s) & \\ \mathbf{n}_i'(s) = & -k(s)\mathbf{t}_i(s) & & +\tau(s)\mathbf{b}_i(s) \\ \mathbf{b}_i'(s) = & & -\tau(s)\mathbf{n}_i(s) & \end{cases}$$

con condizioni iniziali $\mathbf{t}_i(0) = \mathbf{e}_{1i}$, $\mathbf{n}_i(0) = \mathbf{e}_{2i}$, $\mathbf{b}_i(0) = \mathbf{e}_{3i}$ dove $\mathbf{e}_{ij}$ è la componente j-esima del vettore $\mathbf{e}_i$.

Per il teorema 1.2, questi sistemi hanno una unica soluzione. Determiniamo in questo modo tre funzioni vettoriali $\mathbf{t}(s) = (\mathbf{t}_1(s), \mathbf{t}_2(s), \mathbf{t}_3(s))$, e analogamente per $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$, che soddisfano le equazioni di Frenet e formano una base ortonormale per $s = 0$.

2.2 Passo 2: ortonormalità del triedro

Dimostriamo adesso che in effetti i tre vettori sono ortonormali per tutti i valori di $s \in I$. Scriviamo, per comodità di notazione,

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{v}_1(s), \quad \mathbf{n}(s) = \mathbf{v}_2(s), \quad \mathbf{b}(s) = \mathbf{v}_3(s)$$

e

$$k(s) = a_1(s), \quad \tau(s) = a_2(s)$$

e consideriamo i prodotti scalari $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$. Derivando e usando il fatto che le funzioni vettoriali $\mathbf{v}_i$ sono soluzioni dei sistemi di Frenet si ha:

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)' &= \mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j' \\ &= (-a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + a_i\mathbf{v}_{i+1}) \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i \cdot (-a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + a_j\mathbf{v}_{j+1}) \\ &= -a_{i-1}(\mathbf{v}_{i-1} \cdot \mathbf{v}_j) + a_i(\mathbf{v}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_j) - a_{j-1}(\mathbf{v}_{j-1} \cdot \mathbf{v}_i) + a_j(\mathbf{v}_{j+1} \cdot \mathbf{v}_i)\end{aligned}$$

dove usiamo la convenzione che $\mathbf{v}_k = 0$ se k è diverso da $1, 2, 3$ e analogamente $a_k = 0$ se k è diverso da $1, 2$.

Otteniamo quindi che i sei prodotti scalari soddisfano un sistema di sei equazioni differenziali che possiamo scrivere come segue, usando $x_{ij}(s)$ per indicare le funzioni incognite con $i, j = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} x_{11}' = 2a_1x_{12} \\ x_{12}' = -a_1x_{11} + a_2x_{13} + a_1x_{22} \\ x_{13}' = -a_2x_{12} + a_1x_{13} \\ x_{22}' = -2a_1x_{12} + 2a_2x_{23} \\ x_{23}' = -a_1x_{13} - a_2x_{22} + a_2x_{33} \\ x_{33}' = 2a_2x_{23} \end{cases}$$

Imponendo la condizione iniziale $x_{ij}(0) = \delta_{ij}$ abbiamo che, per il teorema 1.2, le funzioni $x_{ij}(s) = \mathbf{v}_i(s) \cdot \mathbf{v}_j(s)$ sono l'unica soluzione del sistema.

Osserviamo adesso che anche le funzioni costanti $y_{ij}(s) \equiv \delta_{ij}$ sono una soluzione del sistema che soddisfa la stessa condizione iniziale: basta infatti sostituire e verificare che le sei equazioni sono soddisfatte.

Dunque $\mathbf{v}_i(s) \cdot \mathbf{v}_j(s) \equiv \delta_{ij}$ costantemente e cioè i vettori $\mathbf{v}_1(s) = \mathbf{t}(s)$, $\mathbf{v}_2(s) = \mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{v}_3(s) = \mathbf{b}(s)$ formano una base ortonormale per ogni $s \in I$. Osserviamo anche che il determinante della matrice di passaggio fra la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ e la base $\{\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0)\}$ è una funzione continua che vale 1 per $s = 0$ ed è sempre diversa da zero. Dunque il determinante è sempre positivo, e cioè le basi $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ sono tutte orientate positivamente.

2.3 Passo 3: la curva β

Dimostriamo adesso che il triedro $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ è il triedro di Frenet di una curva con la curvatura e torsione richiesta.

Integriamo la funzione vettoriale $\mathbf{t}(s)$ e poniamo

$$\beta(s) = \int_0^s \mathbf{t}(u)\, du + P_0$$

Questa curva è quella cercata. Dimostriamo dunque che ha le proprietà volute. Denotiamo, per maggiore chiarezza, $\mathbf{t}_\beta$, $\mathbf{n}_\beta$, $\mathbf{b}_\beta$ i vettori del triedro di Frenet della curva $\beta(s)$ e $k_\beta(s)$ e $\tau_\beta(s)$ la sua curvatura e torsione.

Per prima cosa $\beta(0) = \displaystyle\int_0^0 \mathbf{t}(u)\, du + P_0 = P_0$.

Poiché $|\beta'(s)| = |\mathbf{t}(s)| = 1$ costantemente, la curva è parametrizzata per arcolunghezza e dunque $\mathbf{t}_\beta(s) = \beta'(s) = \mathbf{t}(s)$.

La prima formula di Frenet per la curva β dice

$$\mathbf{t}_\beta' = k_\beta \mathbf{n}_\beta$$

D'altra parte, poiché $\mathbf{t}_\beta = \mathbf{t}$, per la prima equazione del sistema di cui $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ sono soluzione, si ha

$$\mathbf{t}'_\beta = \mathbf{t}' = k\mathbf{n}$$

Passando ai moduli si ha $\|\mathbf{t}'_\beta\| = k$ e poiché per ipotesi $k(s) > 0$, la parametrizzazione è biregolare e quindi il vettore normale $\mathbf{n}_\beta$ è sempre definito. Confrontando le due equazioni si ha

$$k_\beta(s) = k(s), \quad \mathbf{n}_\beta(s) = \mathbf{n}(s) \qquad \text{per ogni } s \in I$$

Per costruzione del triedro di Frenet e per la positività della base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ si ha infine

$$\mathbf{b}_\beta(s) = \mathbf{t}_\beta(s) \times \mathbf{n}_\beta(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s)$$

e dunque anche la torsione di β è quella richiesta:

$$\tau_\beta(s) = -\mathbf{b}_\beta(s)' \cdot \mathbf{n}_\beta(s) = -\mathbf{b}(s)' \cdot \mathbf{n}(s) = \tau(s)$$

In conclusione, la curva β ha per curvatura e torsione le funzioni assegnate, passa per il punto P_0 e per $s = 0$ ha triedro di Frenet assegnato e quindi soddisfa tutte le richieste dell'enunciato.

L'unicità è chiara: il triedro $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ è unico con le condizioni iniziali assegnate, e la curva β è unica perché è l'unica primitiva di $\mathbf{t}(s)$ che vale P_0 per $s = 0$.

Questo conclude la dimostrazione del teorema. $\square$