Sia C una curva diff., param. x arcolunghezza. Studieremo 2 teoremi sulle curve <u>chiuse</u>, e sulla loro <u>curvatura totale</u>. Definiamo perciò subito questi termini.

<u>Def</u> sia C data da $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (N.B. il dominio è un intervallo chiuso e limitato)

C si dice <u>chiusa</u> se $\alpha(0) = \alpha(L)$.

<u>Nota</u> per avere C differenziabile, bisogna anche supporre $\alpha'(0) = \alpha'(L)$, $\alpha''(0) = \alpha''(L)$, e così via. Considereremo curve di classe $\mathcal{C}^2$, e quindi ci fermiamo alle derivate seconde.

Sia ora $k(s)$ la funzione ~~cur~~ curvatura della curva C.

<u>Def</u>. La <u>curvatura totale</u> di C è il numero

$$\boxed{\mu = \int_0^L k(s)\, ds}$$

N.B. l'integrale è un integrale ordinario, perché la funzione $k(s)$ è definita sull'intervallo $[0, L]$.

I teoremi che vedremo oggi legano le propietà geometriche (o topologiche) della ~~cur~~ curva C con il valore di μ.
Nelle dimostrazioni useremo alcuni fatti della teoria delle superfici, che vedremo in seguito.
In ~~x~~ realtà, l'unica superficie coinvolta sarà una sfera di raggio 1 e le propietà che useremo sono ben note. In particolare:

1. se P, Q sono due punti sulla sfera, la curva di lunghezza minima che unisce P e Q è l'arco di cerchio massimo da P a Q (intersezione della sfera con il piano OPQ, dove O è il centro della sfera)

2. l'area della sfera è 4π (in generale, $4\pi R^2$).

Il teorema di Fenchel

L'enunciato preciso è:

Se C è una curva chiusa, allora la curvatura totale $\mu \geq 2\pi$, e l'uguaglianza vale se e solo se C è una curva piana, convessa

Vediamo la dimostrazione solo della ~~pri~~ disuguaglianza

Fissiamo le ~~notazi~~ notazioni:

$\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ param x arcolunghezza

$\underline{t}(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s))$ il vettore tangente (di norma 1)

$k(s) = \|t'(s)\|$ la curvatura

La dimostrazione usa una curva associata alla curva C, l'indicatrice delle tangenti

$\Gamma : \underline{t} : [0, L] \longrightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

cioè pensiamo il punto finale del vettore

$\underline{t}(s)$ come punto della sfera unitaria.

È chiaro che:

$$\underline{\text{curv. totale}}\ \text{di } C = \int_0^L k(s)\,ds = \int_0^L \|\underline{t}'(s)\|\,ds = \underline{\text{lunghezza}}\ \text{di } \Gamma$$

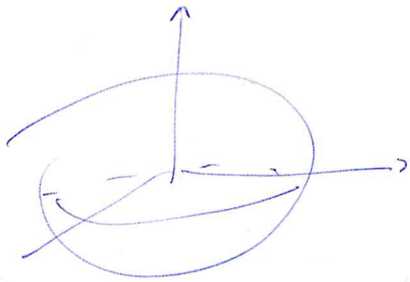
Esempio: se C è piana, p.es. $C \subset \{z=0\}$

si ha: $\alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$

$\underline{t}(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s), 0)$ cioè

Γ è contenuta nell'equatore della sfera.

Esempio:



La parte di Γ che "sta nell'emisfero Nord corrisponde a quando la curva "sale", nell'emisfero Sud a quando "scende"

Il teorema è conseguenza dei due lemmi seguenti:

Lemma 1 L'indicatrice Γ di una curva chiusa C non è contenuta in nessuna semisfera aperta. Γ è cont. in una semisfera chiusa se e solo se C è piana

Lemma 2 Sia Γ una curva $\subseteq S^2$.
Se $\mathcal{L}(\Gamma) < 2\pi$, allora Γ è contenuta in una semisfera aperta.
Se $\mathcal{L}(\Gamma) = 2\pi$, allora è cont. in una semisfera chiusa.

dimostrazione del teorema

C chiusa $\underset{(L1)}{\Longrightarrow}$ Γ non contenuta in una semisfera aperta

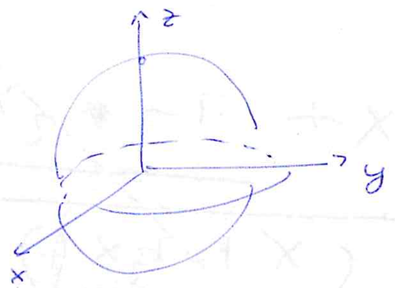
$\underset{(L2)}{\Longrightarrow}$ $L(\Gamma) = \mu(C) \geq 2\pi$

Inoltre, se $L(\Gamma) = 2\pi$, allora C è piana

dimostrazione del LEMMA 1

questa è molto semplice.

Per assurdo, supponiamo $\Gamma \subseteq$ semisfera. A meno di rotazioni, possiamo supporre nell'emisfero "nord", cioè $z \geq 0$



dunque $t_3(s) \geq 0 \quad \forall s \in [0, L]$ e integrando

$$\int_0^L t_3(s)\,ds = \left(\int_0^L \underline{t}(s)\,ds\right)_3 = (\alpha(L) - \alpha(0))_3 = 0$$

perché la curva è chiusa.

Dunque: ① $t_3(s)$ non può essere > 0 sempre

$\Longrightarrow \Gamma$ non è cont. nella semisfera aperta

② $t_3(s) \geq 0$, $\int_0^L t_3(s)\,ds = 0$

$\Longrightarrow t_3(s) \equiv 0$ (t_3 è continua)

ma allora C giace in un piano orizzontale

Viceversa, se C è piana, abbiamo già osservato che $\Gamma \subseteq$ equatore $\subseteq$ semisfera chiusa

dimostrazione del LEMMA 2

questo è più complicato e richiede un pó di geometria (elementare)

~~sia $P = \gamma(0)$, $Q = \gamma(L/2)$. In questo modo~~

siano P, Q sulla curva Γ in modo che la lunghezza dell'arco di curva da P a Q sia uguale alla lunghezza dell'arco di curva da Q a P.

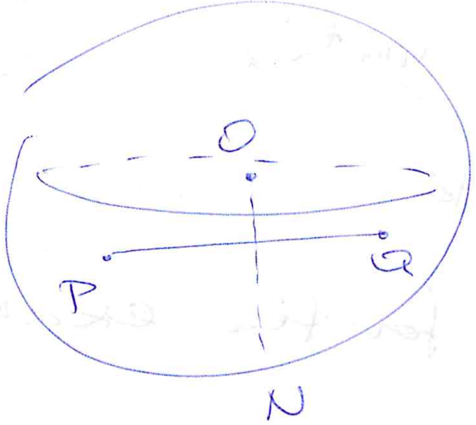
(P = punto qualunque. poiché la lunghezza di Γ è finita, Q = punto che dista da P la metà della lunghezza)

scriviamo $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

e $\ell(\Gamma_1) = \ell(\Gamma_2)$.

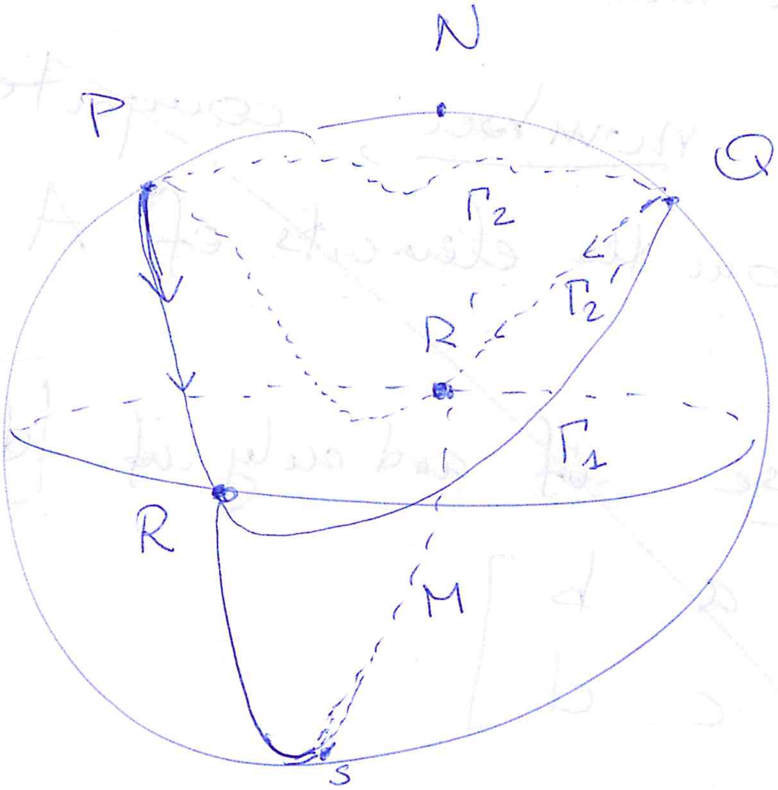
ora ruotiamo la sfera in modo che P e Q siano simmetrici rispetto al polo nord

e cioè o $P = Q = N$, oppure P, Q hanno la stessa latitudine e le longitudini che differiscono di $180°$.



basta prendere la corda PQ,
l'asse ON della corda
e ruotare N al polo nord.

A questo punto ci vuole un disegno



~~supponiamo~~ se Γ non incontra l'equatore, la tesi è dimostrata (Γ sta nell'emisfero superiore)

se Γ tocca ~~le~~ l'equatore, possiamo supporre sia $\Gamma_1 \cap \{eq\} \neq \emptyset$ e sia R un tale punto. Sia Γ_2' la curva simmetrica di Γ_1 rispetto a N.

cioè per ogni pto di Γ_1 prendiamo il simmetrico rispetto ad N.

Si ha quindi $\ell(\Gamma_2') = \ell(\Gamma_1)$ e ponendo $\Gamma' = \Gamma_1 + \Gamma_2'$ si ha $\ell(\Gamma') = \ell(\Gamma)$. Ma adesso su Γ' ci sono 2 punti antipodali R e R' e $\Gamma' = \Gamma_{RR'} + \Gamma_{R'R}$

Sia M il meridiano che passa per R, R' (e diciamo la ~~per~~ metà che contiene il polo sud S). Allora

① $\ell(M) = \pi$ (metà della circonferenza)

② $\ell(M) \leq \ell(\Gamma_{RR'})$

$\ell(M) \leq \ell(\Gamma_{R'R})$

perché il meridiano è il cammino più breve che unisce R e R'.

dunque

$$\ell(\Gamma) = \ell(\Gamma') = \ell(\Gamma_{RR'}) + \ell(\Gamma_{R'R}) \geq 2\pi$$

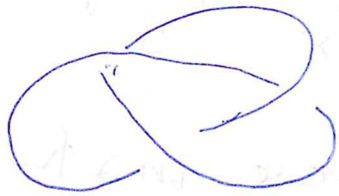
Quindi:

se $\ell(\Gamma) < 2\pi \longrightarrow \Gamma$ non attraversa l'eq.

se $\ell(\Gamma) = 2\pi \longrightarrow \Gamma$ tocca l'equatore (ma non lo attraversa)

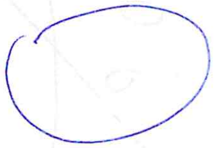
Il teorema di Milnor parla di <u>nodi</u>

<u>Esempio</u>:



= nodo trifoglio

<u>Esempio</u>:



= <u>non</u> nodo (o nodo banale)

<u>cioè</u>: un nodo è l'immagine di una circonferenza nello spazio, e cioè

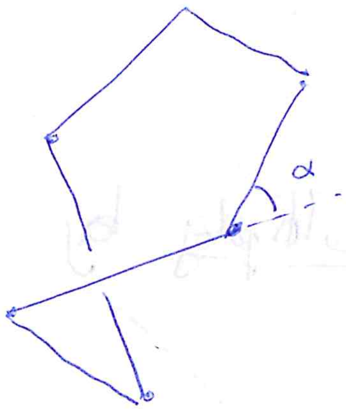
$$\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

- α iniettiva su $(0, L)$
- $\alpha(0) = \alpha(L)$

<u>Teorema</u> (Milnor) sia C una curva chiusa in $\mathbb{R}^3$. Se C è <u>annodata</u>, allora $\mu(C) \geq 4\pi$

(per fare un nodo, devo fare almeno $\underline{\underline{2}}$ giri)

per calcolare la curvatura totale,
C deve essere di classe (almeno) C^2.
Però si può definire $\mu(C)$ anche
per C = poligono (lati + vertici)



è chiaro che la curvatura è nulla lungo i lati e nei vertici il contributo alla variazione del vettore tg è l'angolo esterno

Definiamo perciò

$$K(C) = \sum_i \text{angoli esterni}$$

(Spivak scrive $K(C)$ per indicare la curvatura totale)

Si dimostra che:

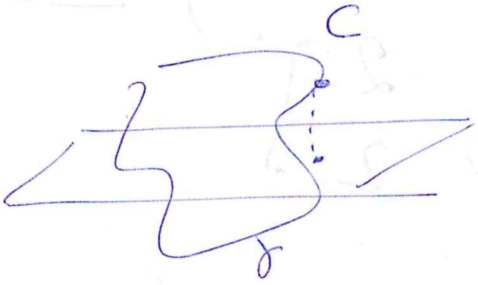
① se C è di classe C^2, allora

$$\int_C k(s)\,ds = \sup_{\substack{\uparrow \\ \text{Poligoni inscritti in } C}} K(P)$$

② ~~esiste sempre una successione~~

dunque le definizioni coincidono

Dimostriamo allora il teorema nel caso di un poligono.
Si dimostra (non lo faremo) che il teorema per i poligoni implica quello per le curve qualsiasi (Spivak, fine pag. 36)
Ancora un preliminare. Sia γ un piano

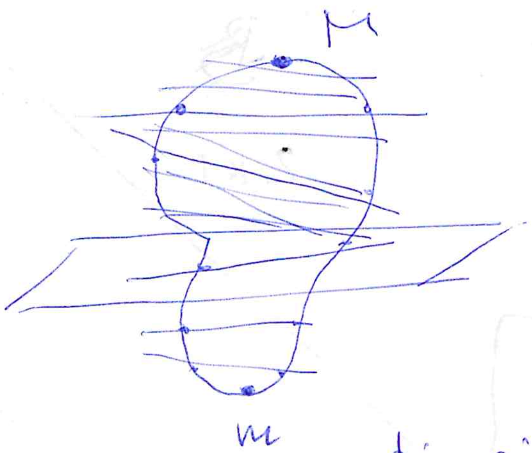


La funzione "altezza" si scrive facilmente come

$$\boxed{C(s)\cdot X} = h_\gamma(s)$$

dove $X \perp \gamma$, $\|X\| = 1$

Supponiamo di trovare un piano γ per cui questa funzione ha un unico massimo locale, M e un minimo assoluto m. Allora gli archi da m a M sono str. crescenti



e quindi ogni piano orizzontale interseca i due archi in un solo punto.

Unendo qs punti si ottiene che C è il bordo di un disco $\Longrightarrow$ C non è annodata.

Basta dunque dimostrare:

$$\boxed{k(C) < 4\pi \implies \exists \text{ vettore } X : \ h_\gamma(s) = C(s)\cdot X \text{ ha un unico massimo locale.}}$$

Come sono i vettori X? Sono tutti i vettori che stanno su una sfera. Dobbiamo ~~trovare~~ trovarne uno particolare, ~~consid~~ consideriamoli tutti. Poniamo, per $X \in S^2$

$$\mu_C(X) = \text{numero di massimi locali di } h_\gamma(C)$$

e dimostreremo

$$\boxed{\int_{S^2} \mu_C \, dA = 2k(C)}$$

Allora siamo a posto:

$$k(C) < 4\pi \implies \int_{S^2} \mu_C \, dA < 8\pi = 2\int_{S^2} dA$$

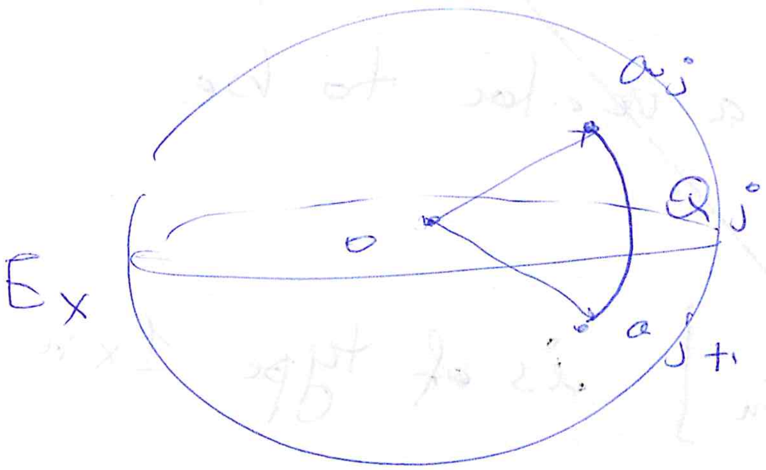
$$\implies \mu_C(X) < 2 \quad \text{per qualche } X \in S^2$$

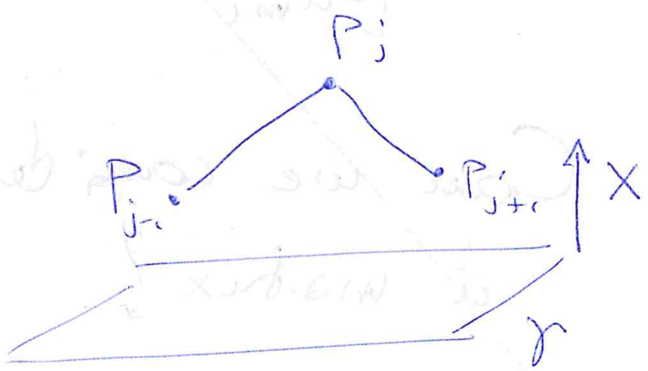
(se fosse $\mu_C(X) \geq 2 \ \forall X$, l'integrale sarebbe $\geq 8\pi$.)

Sia dunque P il poligono, di vertici $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n = P_0$

ogni lato determina un vettore e normalizz. un punto sulla sfera:

$$a_j = \frac{P_j - P_{j-1}}{\| P_j - P_{j-1} \|}$$





se "salgo" $\frac{P_j - P_{j-1}}{\| \quad \|} = a_j \in$ emisfero Nord

se "scendo" ——————————————— Sud

Q_j = arco che congiunge $a_j \to a_{j+1}$

Q_j incontra l'equatore? $\Longleftrightarrow$ P_j max o min

(passo da Nord a Sud o viceversa)

Dunque

$$2\mu_P(X) = \sum_j \#\{\text{intersezioni di } Q_j \text{ con } E_X\}$$

$$= \sum_j \mu_{Q_j}(X)$$

$$\longrightarrow \quad 2\int \mu_P \, dA = \sum_j \int \mu_{Q_j} \, dA$$

Quindi devo calcolare quest'ultimo integrale

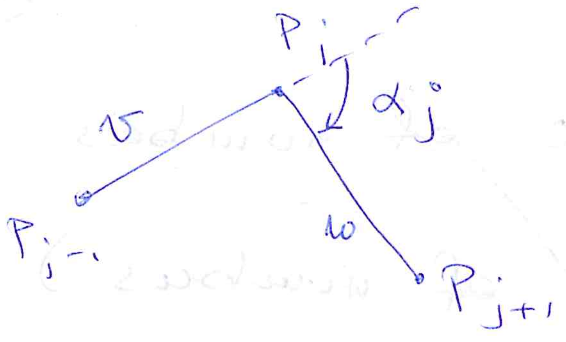
N.B. il poligono P è fissato ... ~~Al variare~~ di $/X/$, ~~max e min~~ così come i punti a_j e gli archi Q_j.

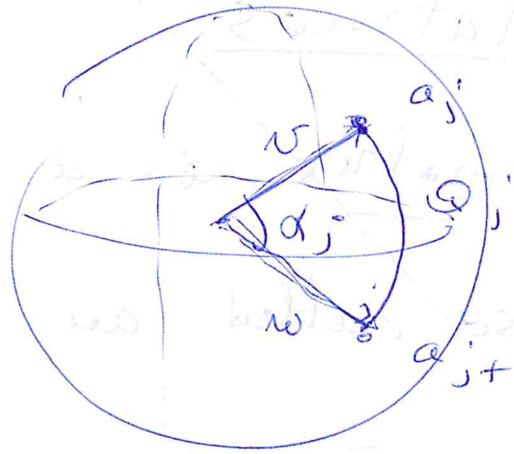
Al variare di X, quello che varia è l'equazione E_X, che dà la funzione $\mu_{Q_j}(X)$.

È anche chiaro che $\mu_{Q_j}(X)$ è sempre un intero e quindi l'integrale è semplicemente:

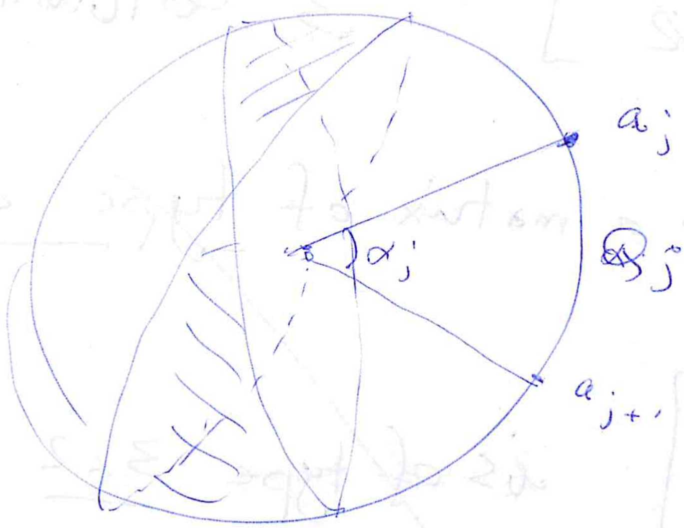
$$1 \cdot \left(\begin{matrix}\text{area di } X \\ \text{per cui } \mu(X) = 1\end{matrix}\right) + 2 \cdot \left(\begin{matrix}\text{area di } X \\ \text{per cui } \mu(X) = 2\end{matrix}\right)$$

$$+ \cdots$$





$\ell(Q_j) = \alpha_j$



archi di cerchio max perpendicolari ai vettori a_j a_{j+1}

E_X attraversa $Q_j \iff X \in$ "doppia lunetta"

(E_X e X sono ortogonali)

l'area di questa "doppia lunetta" è

$$\frac{\alpha_j}{\pi} \cdot (\text{area di } S^2) = \frac{\alpha_j}{\pi} \cdot 4\pi = 4\alpha_j$$

dunque $\quad 2\int \mu_p \, dA = \sum_j 4\alpha_j$

e dividendo per 2 $\quad \boxed{\int \mu_p \, dA = 2K(P)}$