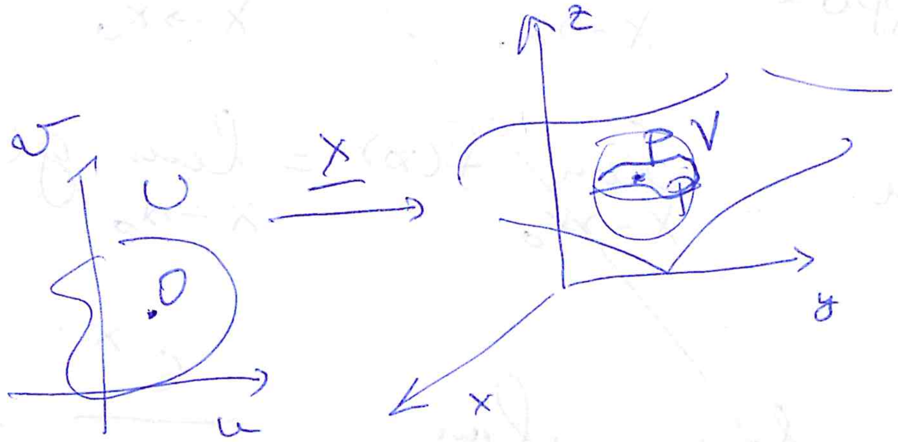
Abbiamo definito le curve regolari come funzioni $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con opportune proprietà. Questa idea non funziona nel caso delle superfici e cambiamo quindi punto di vista. Definiamo una superficie come sottoinsieme dello spazio $\mathbb{R}^3$, ~~che~~ con condizioni che assicurano che le superfici che già conosciamo (sfera, cilindro, toro, ...) sono in effetti superfici.

La definizione è elaborata e passeremo un po' di tempo a vedere esempi per capire la funzione delle varie ipotesi. La definizione contiene un misto di ipotesi topologiche e differenziali. La topologia sarà sempre quella euclidea in $\mathbb{R}^3$ (e $\mathbb{R}^2$).

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$. S ~~XY~~ si dice **superficie regolare** se, per ogni $p \in S$ esiste un intorno V di p in $\mathbb{R}^3$ e una funzione $\underline{X} : U \longrightarrow V \cap S$, dove U è un aperto di $\mathbb{R}^2$, $\underline{X}$ suriettiva tale che:

$\underline{X}(0) = p$



$\boxed{① \ \underline{X} \text{ è differenziabile,}}$ cioè, scrivendo:

$$\underline{X}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

le componenti $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ hanno derivate (parziali) continue di ogni ordine

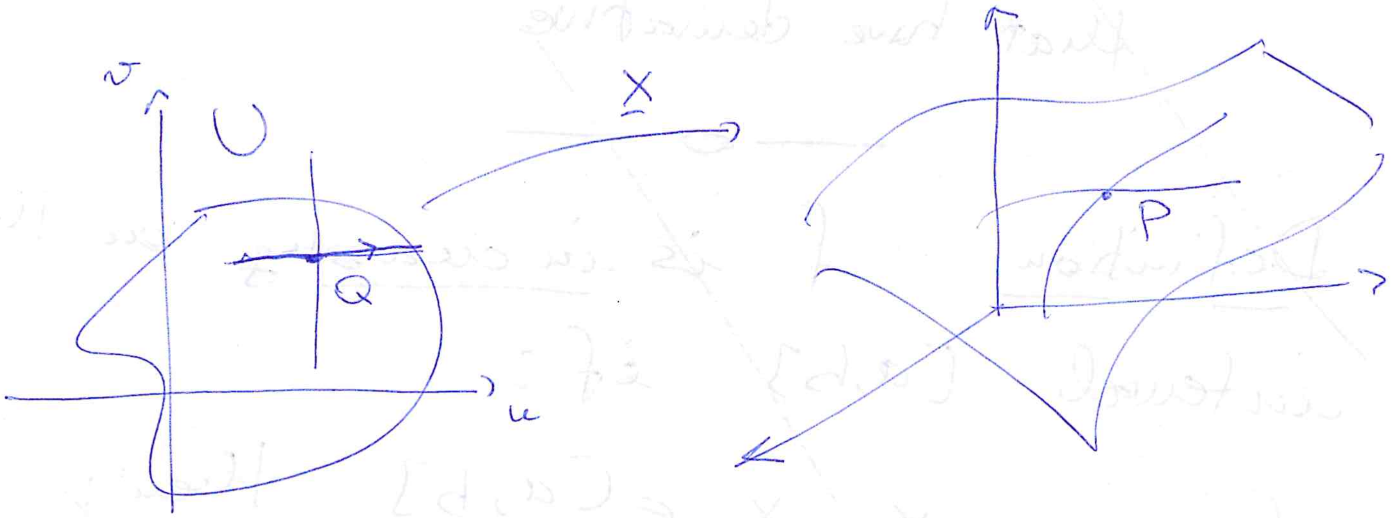
$\boxed{② \ \underline{X} \text{ è un omeomorfismo}}$ poiché $\underline{X}$ è continua e suriettiva, questo significa che $\underline{X}$ è iniettiva, e (importante) $\underline{X}^{-1}$ continua.

③ $\forall q \in U$ il differenziale $d\underline{X}_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è iniettivo (di rango massimo)

Terminologia:

- $\underline{X}$ si dice parametrizzazione locale
- $\underline{X}^{-1}$ si dice carta locale
- $V \cap S = \underline{X}(U)$ si dice intorno coordinato
- le componenti di $\underline{X}^{-1}$ si dicono coordinate locali (infatti $\underline{X}^{-1}$ associa ad ogni punto di $V \cap S$ una coppia di numeri, le sue coordinate)

Scriviamo esplicitamente la condizione (3)



se $\underline{X}(Q) = P$, sia $Q = (u_0, v_0)$

Il differenziale porta il vettore tg ad una curva in U nel vettore tg alla sua immagine

Se prendiamo la curva (u, v_0) in U

il suo vettore tg in Q è $(1, 0)$

L'immagine è $u \longrightarrow (x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0))$

e quindi il vettore tangente è

$$\underline{X}_u = \frac{\partial \underline{X}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

e allo stesso modo, usando la curva (u_0, v) (retta verticale) si ottiene che il vett. tg alla curva immagine è $\underline{X}_v$. Poiché $\{(1,0), (0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$, in questa base il differenziale di $\underline{X}$ ha matrice:

$$d\underline{X}_Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(Q) & \frac{\partial x}{\partial v}(Q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(Q) & \frac{\partial y}{\partial v}(Q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(Q) & \frac{\partial z}{\partial v}(Q) \end{bmatrix}$$

Dunque la condizione 3 significa:

$$\boxed{\forall Q \in U \text{ i vettori } \underline{X}_u(Q), \underline{X}_v(Q) \text{ sono linearmente indipendenti}}$$

In modo equivalente possiamo dire:

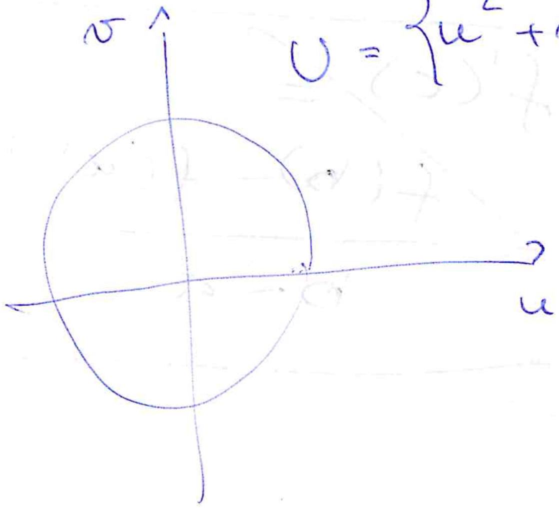
$$\boxed{\underline{X}_u(Q) \wedge \underline{X}_v(Q) \neq 0 \quad \forall Q \in U}$$

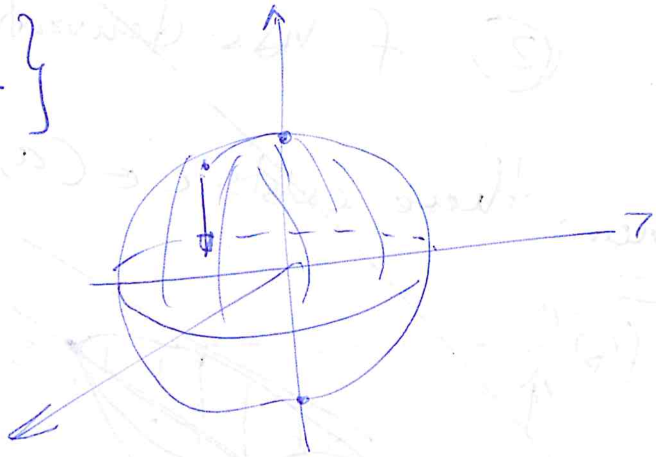
Vediamo ora un esempio in dettaglio.

Sia $S = S^2 = \{(x\,y\,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$

(ovviamente, lo stesso andrà bene per ogni raggio)

$U = \{u^2+v^2<1\}$





$$\underline{X}_1(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

(cioè scriviamo $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$)

① è chiaro che $\underline{X}_1$ è C^∞ (attenzione al dominio)

③ $(\underline{X}_1)_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ * \end{bmatrix}$, $(\underline{X}_2)_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ * \end{bmatrix}$

quindi sempre lin. ind.

② $\underline{X}_1^{-1}$ è semplicemente la proiezione dell'emisfero superiore <u>aperto</u> sul piano xy e quindi continua.

Questa param. mostra che tutti i punti (6)

~~nell~~ nell'em. sup. aperto soddisfano la def.

di superficie regolare.

Usando ora $\underline{X}_2(u,v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})$

copriamo l'emisfero inferiore. Mancano

i punti sull'equatore. Ma basta usare

le semisfere ottenute usando i piani xz, yz

per ottenere $\underline{6}$ param. che coprono tutta

la sfera.

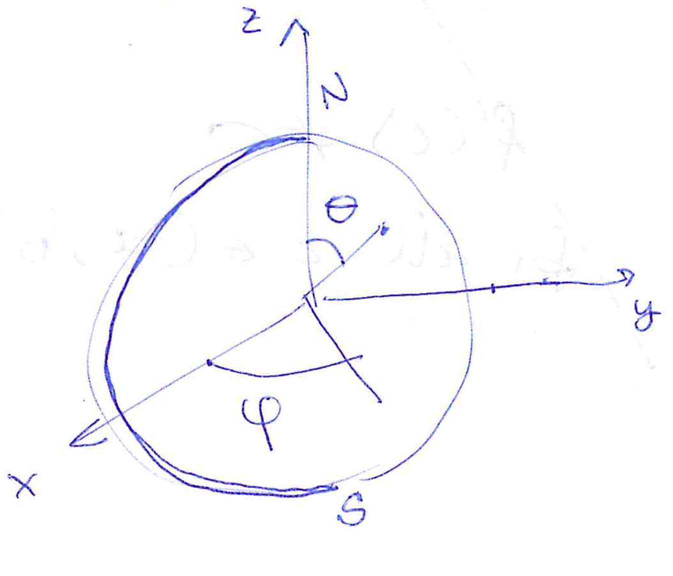
Sulla sfera esiste un'altro insieme di

param: le <u>coordinate polari</u>

$$U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \pi, \ 0 < \varphi < 2\pi\}$$

(un rettangolo aperto)

$$\underline{X}(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \ \cos\theta)$$



(7)

L'immagine è la sfera tranne un meridiano (quello con $\varphi = 0$) poli compresi

è chiaro che $\underline{X}$ è differenziabile (①)

Le derivate parziali sono:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} +\cos\theta\cos\varphi & -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix}$$

I determinanti sono

$12 \longrightarrow \cos\theta\operatorname{sen}\theta$

$13 \longrightarrow -\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi$

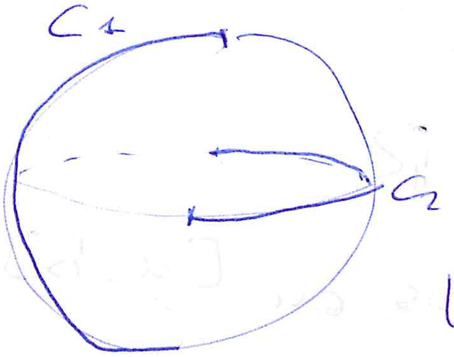
$23 \longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi$

e non possono annullarsi contemporaneamente (esercizio). ③

E' semplice vedere che $\underline{X}$ è biunivoca da U alla sfera meno il meridiano.

E' meno evidente che $\underline{X}^{-1}$ sia continua.

Vedremo in seguito un teorema che darà qs risultato.



ruotando le funzioni, si può coprire la sfera tranne metà equatore. Le due param. insieme coprono la sfera.

—o—

Vediamo adesso due modi standard di ottenere superfici.

<u>Proposizione 1</u> sia $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$, dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è un <u>aperto</u>. Allora il grafico di f è una sup. regolare:

$$S = \Gamma_f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = f(x,y) \right\}$$

<u>Dimostrazione</u>

Come per la sfera, poniamo:

$$\underline{x} : U \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \longrightarrow (u, v, f(u,v))$$

1 e 3 sono ovvie. 2 è vera perché l'inversa $\underline{x}^{-1} : S \longrightarrow U$ è la proiezione sul piano xy.

Ricordiamo qs enunciato come:

$\boxed{\text{\underline{Proposizione 1} Il grafico di una funzione differenziabile è una superficie regolare}}$

~~Nota~~. (Questa è la nozione "parametrica")

Trattiamo ora il caso "cartesiano". Ricordiamo che, data $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^∞ un punto $p \in \mathbb{R}^n$ è un <u>punto critico</u> se il differenziale dF_p <u>non</u> è suriettivo.

Se p è un punto critico, $F(p)$ si dice <u>valore critico</u>. Se $q \in \mathbb{R}^m$ non è un valore critico si dice <u>valore regolare</u>

A noi interessa solo il caso

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

In qs caso il differenziale in p è

$$dF_p = (f_x(p), f_y(p), f_z(p))$$

e dire <u>non suriettivo</u> significa $dF_p = 0$

<u>cioè</u>: $\boxed{p \text{ critico} \iff f_x(p) = f_y(p) = f_z(p) = 0}$

Conseguenza importante del teorema delle funzioni implicite (teorema della funzione inversa) è la:

Proposizione 2 Sia $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile e sia $a \in f(U)$ un valore regolare. Allora

$$S = f^{-1}(a) \subseteq \mathbb{R}^3$$

è una superficie regolare

dimostrazione sia $p \in f^{-1}(a)$. Dobbiamo trovare una param. locale intorno a p.

Poiché p non è critico, almeno una dei parz è $\neq 0$, supponiamo $\boxed{f_z(p) \neq 0}$.

Definiamo: $F: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$

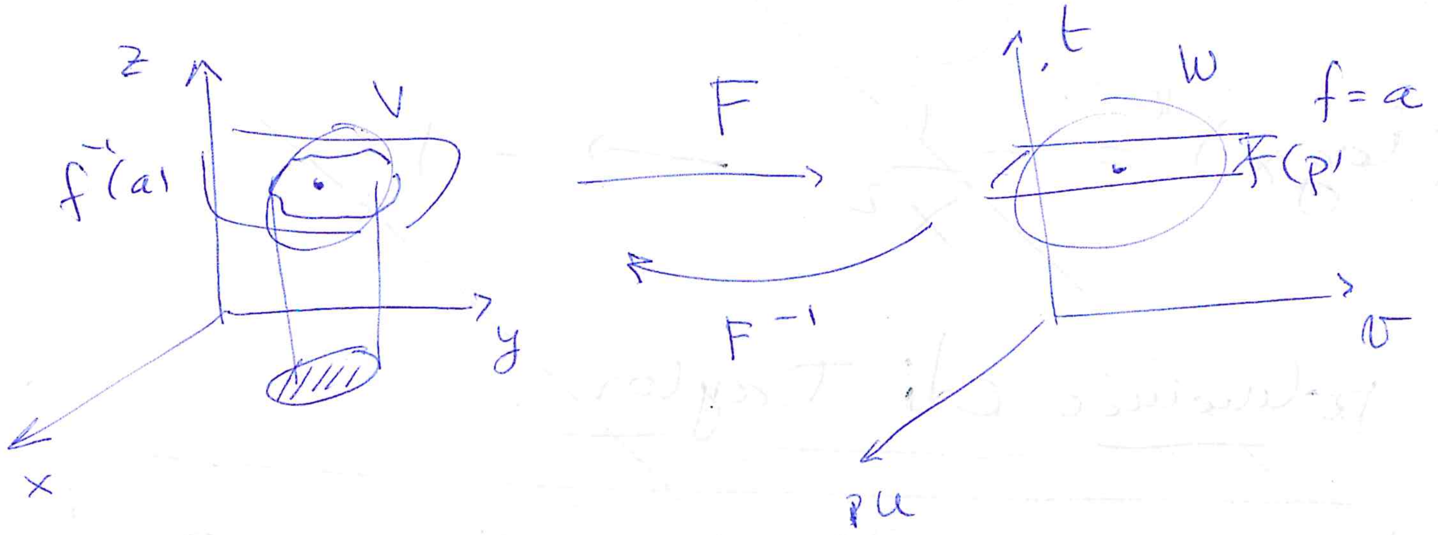
$$(x,y,z) \longrightarrow (x, y, f(x,y,z))$$

$$dF_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(p) & f_y(p) & f_z(p) \end{bmatrix}$$ e quindi

$$\boxed{\det(dF_p) = f_z(p) \neq 0}$$

Ci sono dunque intorni V di p
W di $F(p)$

su cui F è invertibile, e F^{-1} è differenziabile



$$F(x,y,z) = \begin{cases} u = x \\ v = y \\ t = f(x,y,z) \end{cases}$$

$$F^{-1}(u,v,t) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u,v,t) \end{cases} \quad \text{differenziabili}$$

In particolare $\boxed{z = g(u,v,a) = h(x,y)}$

è ben definita e differenziabile sulla proiezione di V sul piano xy, e

$$\Gamma_h = \{(x,y,h(x,y))\} = f^{-1}(a) \cap V$$

dunque $f^{-1}(a) \cap V$ è una sup. regolare per la prop. 1