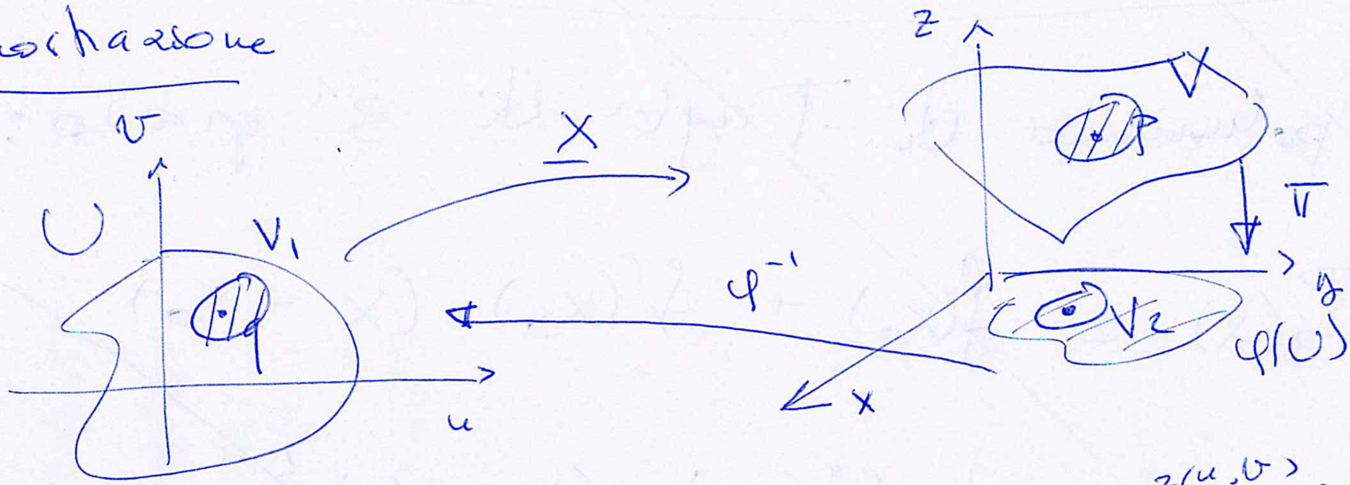
GIOVEDI 21/03/2019

Proposizione 3 Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup regolare e sia $p \in S$. Allora esiste un intorno $V \subseteq S$ di p tale che V è il grafico di una funzione C^∞ in una delle seguenti forme

$$z = f(x,y) \quad \text{oppure} \quad y = g(x,z)$$

$$\text{oppure} \quad x = h(y,z)$$

dimostrazione



sia $p = \underline{X}(q)$ $\quad \underline{X}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

poiché $\underline{X}$ param, uno dei tre det della matrice Jacobiana è $\neq 0$ in $q = \underline{X}^{-1}(p)$

$$df_q = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} \quad \text{supponiamo} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

e sia $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(u,v) \longrightarrow (x(u,v), y(u,v))$$

cioè $\varphi = \pi \circ \underline{X}$

$d\varphi_q = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$ e quindi esiste un'inversa locale $\varphi^{-1}: V_2 \longrightarrow V_1$

dove V_2 = intorno di $\varphi(q)$, V_1 int. di q

Poiché $\underline{x}$ è un omeo ~~[illegible]~~ sull'immagine $V = \underline{x}(V_1)$

è un intorno di p.

Ora: ponendo $f(x,y) = (z \circ \varphi^{-1}): V_2 \longrightarrow V$

si ha che V è il grafico di $f(x,y)$ ∎

Ricordiamo questo enunciato come:

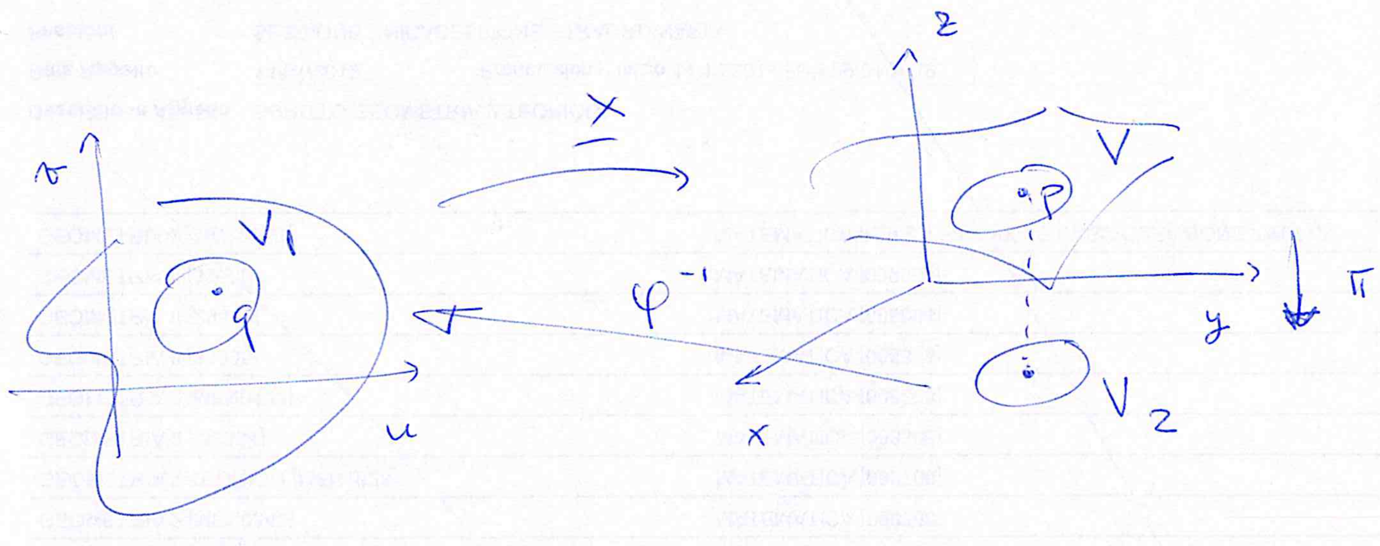
Prop 3 Una superficie regolare è localmente un grafico.

(Non può esserlo globalmente, per esempio la sfera è unione di grafici locali, ma non è il grafico di nessuna funzione)

L'ultima proposizione di questa parte iniziale ci dice che, sotto opportune condizioni, il fatto che $\underline{X}^{-1}$ sia continua è automaticamente vero.

Proposizione 4 Sia S una superficie regolare e sia $p \in S$.
Sia $\underline{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $p \in \underline{X}(U)$ e che soddisfa le proprietà ① e ③ della definizione di parametrizzazione.
Se $\underline{X}$ è iniettiva, allora $\underline{X}^{-1}$ è continua.

Dimostrazione La situazione è come prima:



$$\underline{X}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

$\underline{X}$ è diff (per la ①) e il rango della matrice Jacobiana è 2 (per la ③) possiamo supporre $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ e allora

4

sia $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proiezione sul piano (xy). Ponendo $\varphi = (\pi \circ \underline{X})$ si ha che esiste localmente l'inversa φ^{-1} su un intorno V_2 e cioè:

$$\varphi : V_1 \longrightarrow V_2 \quad \underline{\text{omeomorfismo}}$$

se $\underline{X}$ è iniettiva, e $V = \underline{X}(V_1)$ allora su V esiste l'inversa $\underline{X}^{-1} : V \longrightarrow V_1$

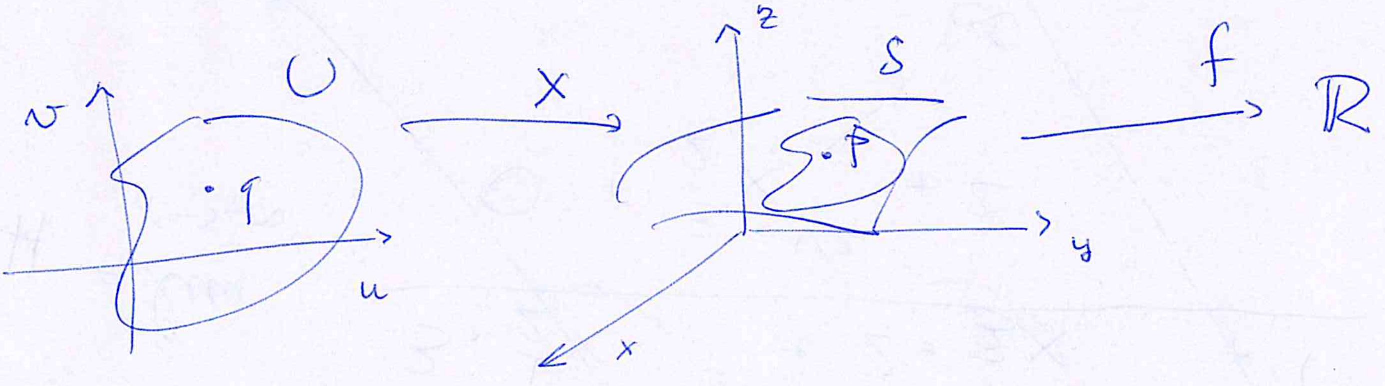
e $\underline{X}^{-1} = \varphi^{-1} \circ \pi = (\pi \circ X)^{-1} \circ \pi$

e sia π che φ^{-1} sono continue $\Longrightarrow \underline{X}^{-1}$ continua $\blacksquare$

Vogliamo ora definire il concetto di funzione differenziabile con dominio una superficie regolare. Sia dunque

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R} \, , \quad \text{dove} \quad S \subseteq \mathbb{R}^3 \ \text{è}$$

una superficie regolare. S, con la topologia indotta, è uno sp. topologico e quindi sappiamo cosa vuol dire che f è continua. Però non è chiaro il concetto di derivata. Un'idea è la seguente: poiché S è una superficie, se $p \in S$, c'è una param. reg. $\underline{x} : U \to S$ intorno a p.



possiamo allora considerare $(f \circ \underline{x}) : U \longrightarrow \mathbb{R}$ e questa è una funzione da un aperto di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$, quindi sappiamo cosa vuol dire differenziabile.

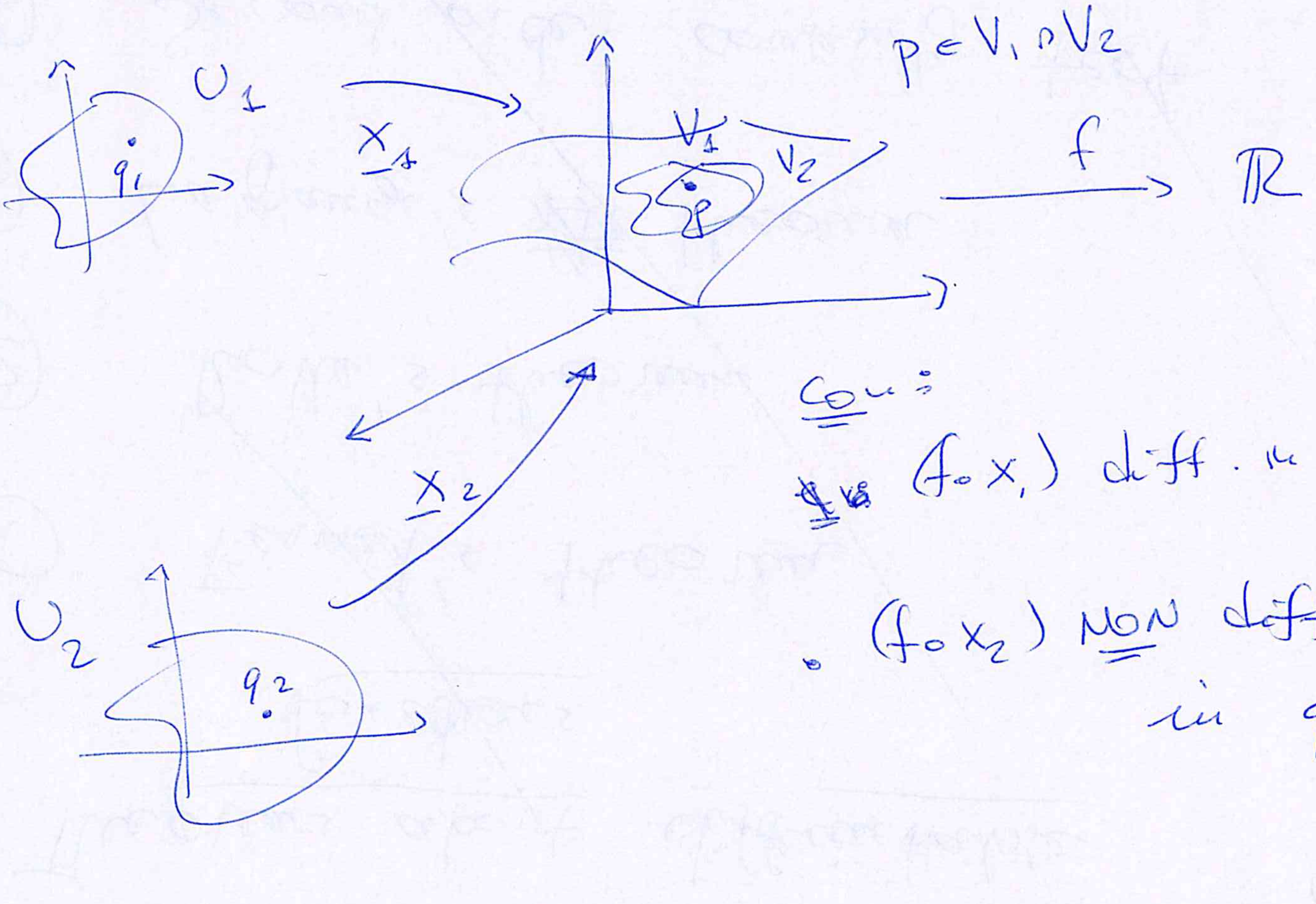
Diamo dunque la definizione:

Definizione 1 (do Carmo, def 1, pag. 2-3)

Sia $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $p \in S$.

f si dice differenziabile in p se esiste una param. locale $\underline{x} : U \longrightarrow S$, con $\underline{x}(q) = p$ e la funzione $(f \circ \underline{x})$ è differenziabile in q.

Questa definizione è corretta, ma non ha senso. Infatti, potrebbero esistere 2 parametrizzazioni locali



con:

- $(f \circ x_1)$ diff. in q_1
- $(f \circ x_2)$ NON diff in q_2

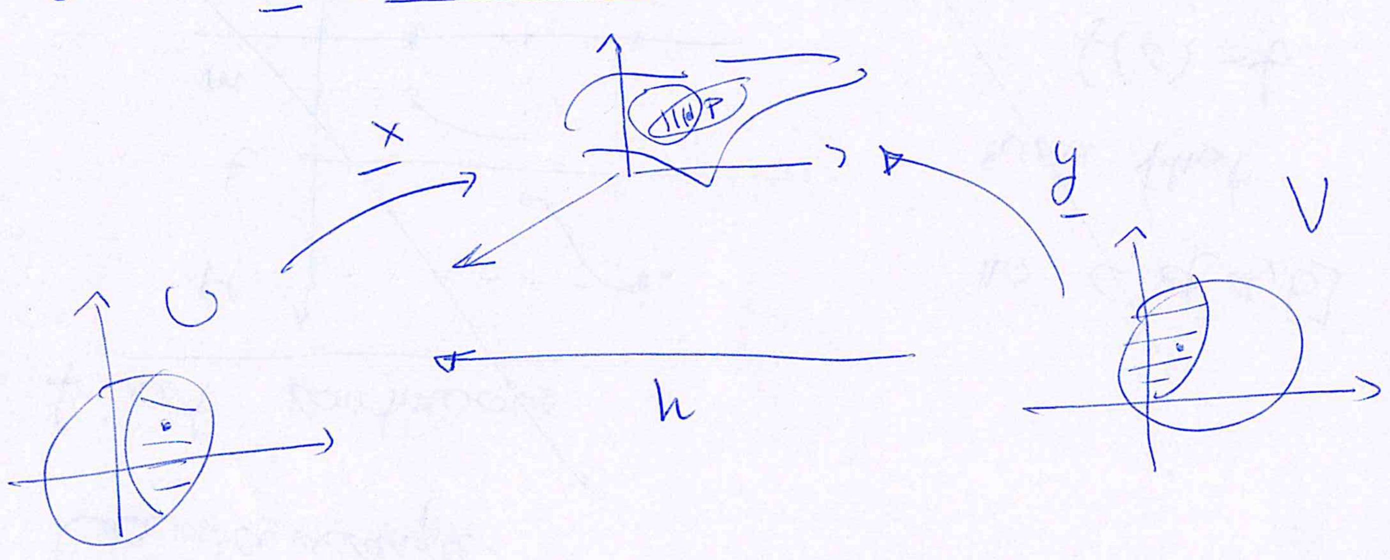
dobbiamo perciò dimostrare che questo non capita e cioè che se esiste una param $\underline{x}$ per cui $f \circ \underline{x}$ è differenziabile, allora per ogni param locale $\underline{y}$ si ha $f \circ \underline{y}$ differenziabile.

Il teorema che vediamo è più preciso e dice:

Proposizione 1 (Cambiamento di parametri)
Sia S una sup. regolare $\subseteq \mathbb{R}^3$. $p \in S$.
Siano $\underline{x} : U \longrightarrow S$ e $\underline{y} : V \longrightarrow S$ due param tali che $p \in \underline{x}(U) \cap \underline{y}(V) = W$.
Allora: il cambiamento di coordinate

$$h = \underline{x}^{-1} \circ \underline{y} : \underline{y}^{-1}(W) \longrightarrow \underline{x}(W)$$

è un diffeomorfismo.



Osserviamo che:

1. h ; aperto di $\mathbb{R}^2 \longrightarrow$ aperto di $\mathbb{R}^2$
quindi sappiamo cosa vuol dire diffeomorf.

2. se $\underline{y}(q_1) = P = \underline{x}(q_2)$

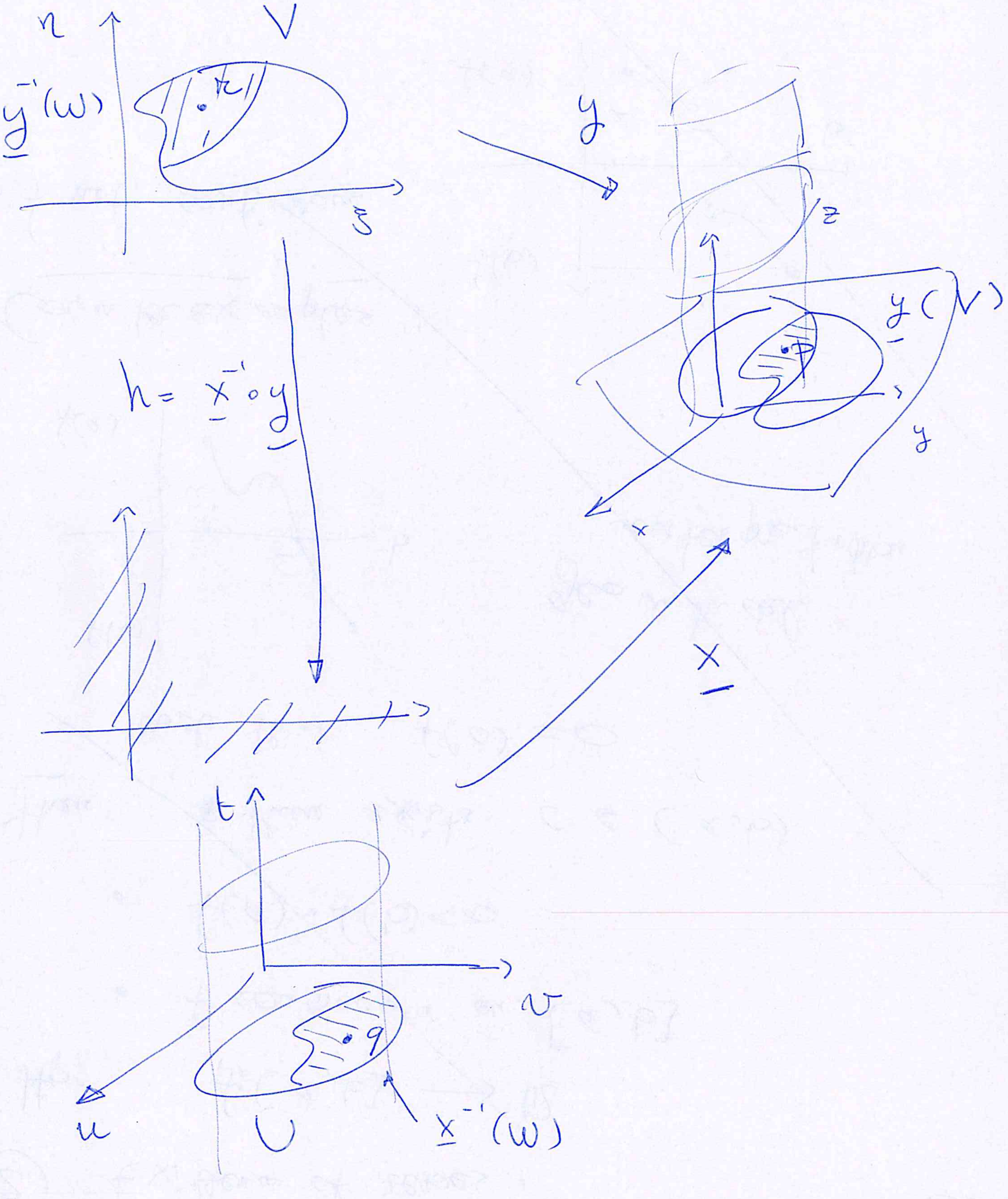
$h(q_1) = q_2$ è esattamente il "cambiamento di coordinate". Infatti (q_1) sono le coord di P nel sistema $\underline{x}$, mentre (q_2) sono le coord di P nel sistema $\underline{y}$.

Il problema principale nella dimostrazione è che $\underline{x}^{-1}$ è definito solo su (un aperto di) S, che è un chiuso in $\mathbb{R}^3$ e non è chiaro cosa vuol dire diff. per funzioni definite su chiusi.

La dimostrazione che vedremo affronta qs. problema.

Dimostrazione della prop. 1

Riportiamo il disegno del do Carmo!
(con le stesse notazioni)



per prima cosa osserviamo che h è omeomorfismo (continua con inversa continua) perché $\underline{x}$ e $\underline{y}$ lo sono.

Occorre adesso dimostrare che h è differenziabile (la diff. di h^{-1} avrà la stessa dimostrazione)

Sia $r \in \underline{y}^{-1}(W)$ e poniamo $\boxed{q = h(r)}$

Sappiamo che $\underline{x}$ è piano, cioè il differenziale ha rango 2 e possiamo supporre $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$

$\underline{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

definiamo: $F : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u,v,t) \longrightarrow (x(u,v), y(u,v), z(u,v)+t)$$

Cioè: ogni sezione orizzontale del cilindro $U \times \mathbb{R}$ viene mandata nella superficie S "traslata verticalmente" (è l'effetto di sommare t alla componente $z(u,v)$).

Si ha che:

a. F è differenziabile

b. $F\Big|_{U\times\{0\}} = \underline{x}$

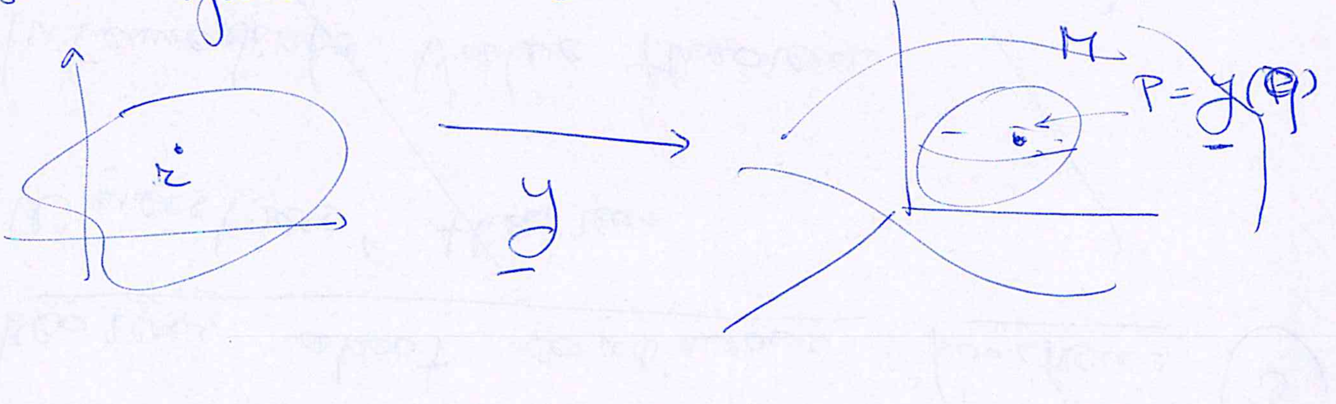
cioè F è un'estensione di $\underline{x}$ ad un aperto di $\mathbb{R}^3$. Inoltre

c. $$dF_q = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} x_u & x_v & 0 \\ y_u & y_v & 0 \\ z_u & z_v & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \quad & \quad & \uparrow \partial/\partial t \end{array} \end{array}$$

e quindi $\det(dF_q) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$

Per il teorema della funzione inversa esiste un intorno M di $\underline{x}(q)$ in $\mathbb{R}^3$ su cui F^{-1} esiste ed è differenziabile

N.B. M è aperto di $\underline{\mathbb{R}}^3$, non solo sulla superficie S.



$\underline{y}$ è <u>continua</u> $\Longrightarrow$ $\exists$ N intorno di r in $\mathbb{R}^2$ tale che $\underline{y}(N) \subseteq M$

<u>Dunque</u>:

$$h|_N = x^{-1} \circ \underline{y}|_N = F^{-1} \circ \underline{y}|_N$$

perché l'immagine di $\underline{y}$ è in ~~[illegible]~~ $S \cap M$ e quindi $\underline{x}$ è il "livello 0" di F.

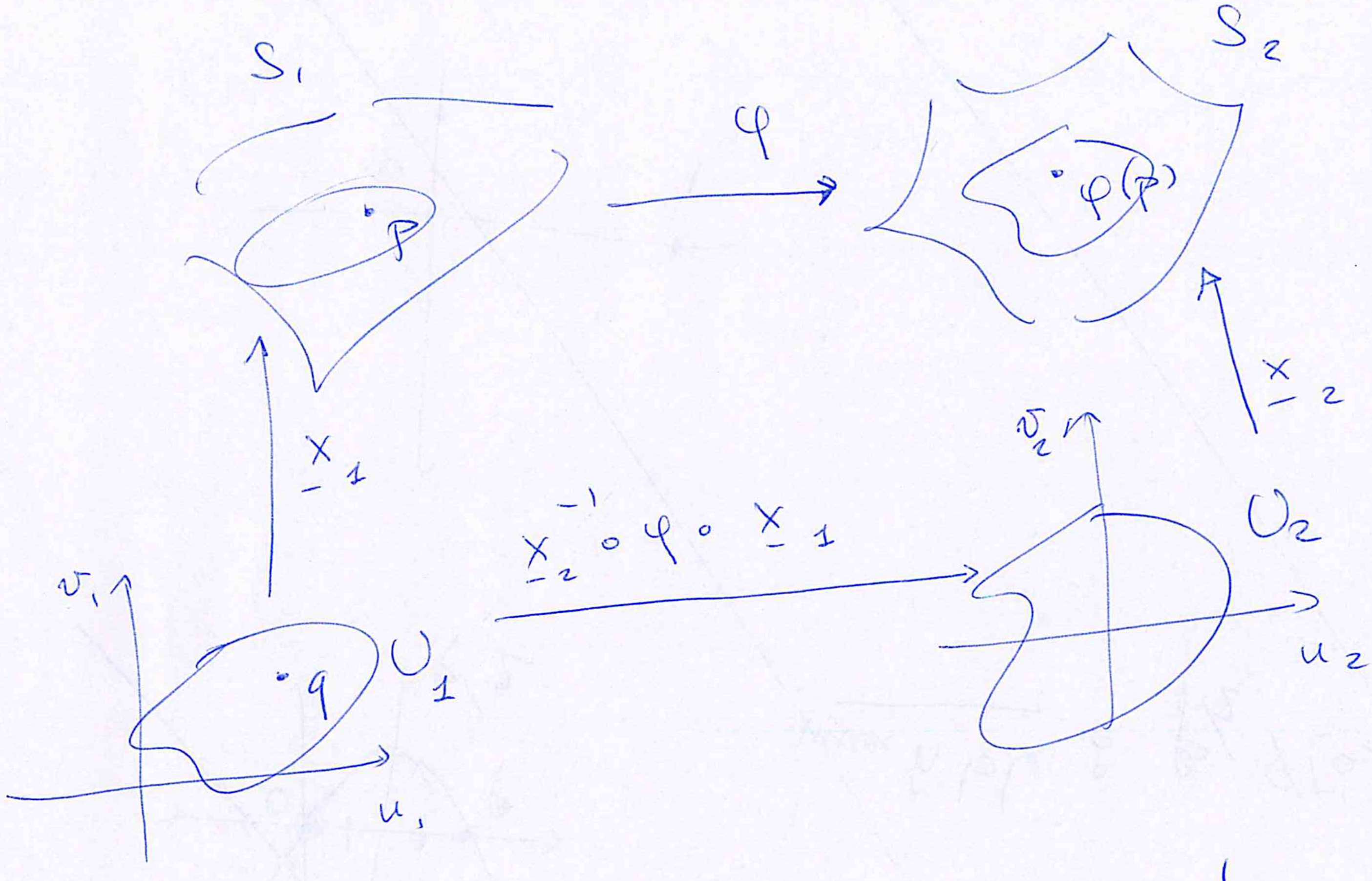
<u>Attenzione</u>: F^{-1} è proprio l'estensione di $\underline{x}^{-1}$ ad un aperto di $\mathbb{R}^3$.

Abbiamo finito: $\left.\begin{array}{l} \underline{y} \text{ è diff} \\ F^{-1} \text{ è diff} \end{array}\right\} \Longrightarrow$ la comp è differenziabile

È semplice ora dare la definizione di <u>funzione differenziabile</u> fra superfici

Siano S_1, S_2 ~~[illegible]~~ superfici regolari e sia $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ continua.

φ è detta differenziabile in $p \in S_1$ se:



esistono param. $\underline{x}_1$ intorno a p e $\underline{x}_2$ intorno a $\varphi(p)$ tali che

$$x_2^{-1} \circ \varphi \circ \underline{x}_1 : U_1 \longrightarrow U_2$$

è differenziabile in ~~p~~ $q = \underline{x}_1^{-1}(p)$

$\underline{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \underline{x}_1$ è l'espressione di φ in coordinate locali.

Anche qui, la prop. 1 ci assicura che se $\exists\, \underline{x}_1, \underline{x}_2$ allora per ogni coppia $\underline{y}_1, \underline{y}_2$ di param locali, $\underline{y}_2^{-1} \circ \varphi \circ \underline{y}_1$ sarà differenziabile cioè:

il concetto di differenziabilità **non dipende** dalle coordinate locali scelte