Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 14 giugno 2019

COGNOME .... **NOME** ....

Compito n. 1

Esercizio 1. (8 punti) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (\cos t,\, \sin t,\, \cos at), \quad t \in \mathbb{R}$$

1. stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana;
2. per ognuno dei valori trovati determinare il piano che contiene la curva;
3. quali delle curve trovate giacciono su una sfera?

Soluzione.

1. La curva è biregolare: infatti si ha
$$\begin{aligned} \dot\alpha &= (-\sin t,\, \cos t,\, -a \sin at) \\ \ddot\alpha &= (-\cos t,\, -\sin t,\, -a^2 \cos at) \\ \dot\alpha \wedge \ddot\alpha &= (*,\, *,\, 1) \end{aligned}$$
e quindi la curvatura $k(t) = \dfrac{\|\dot\alpha \wedge \ddot\alpha\|}{\|\dot\alpha\|^3}$ è sempre diversa da 0. Dunque la curva è piana se e solo se la torsione è nulla e basta annullare il numeratore, e cioè il prodotto misto $(\dot\alpha \wedge \ddot\alpha) \cdot \dddot\alpha$. Si ottiene $a = 0, 1, -1$.
2. Notiamo che per $a = 1$ e $a = -1$ la curva è la stessa. I piani sono $z = 1$ per $a = 0$ e $x = z$ per $a = 1$.
3. Poiché l'intersezione di un piano e una sfera è una circonferenza, la curva sta su una sfera se e solo se è una circonferenza.

   Per $a = 0$ la curva è una circonferenza e quindi sta su una sfera, per esempio sulla sfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ di centro $(0, 0, 1)$ e raggio 1.

   Per $a = 1$ la curva è un'ellisse e non può stare su una sfera. La curva si può vedere come intersezione del piano $x = z$ con l'ellissoide $x^2/2 + y^2 + z^2/2 = 1$ oppure con il cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

   Per la seconda curva si può anche calcolare la curvatura e vedere che non è costante.

Esercizio 2. (4 punti) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza. Supponiamo che esista un vettore costante non nullo $\mathbf{v}$ tale che

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{v}, \qquad \forall\, s \in I$$

Dimostrare che

$$|k(s)| = |\tau(s)|, \qquad \forall\, s \in I$$

Soluzione. Derivando l'uguaglianza data per ipotesi si ha:

$$\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{v}, \qquad \forall\, s \in I$$

e dalla prima e terza formula di Frenet si ottiene

$$k(s)\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{v} = -\tau(s)\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{v} \qquad \forall\, s \in I$$

Ci sono due casi:

1. se $\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{v} \equiv 0$, allora derivando e usando la seconda formula di Frenet si ha

   $$\mathbf{n}'(s) \cdot \mathbf{v} = (-k(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)) \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \forall\, s \in I$$

   e quindi, usando l'ipotesi, si ottiene $k(s) = \tau(s)$.

   Notiamo che non può essere $\mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{v} \equiv 0$. Infatti questo direbbe che i vettori $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ appartengono ad un piano costante e cioè il vettore normale sarebbe costante. Ma la seconda formula di Frenet dice che la derivata di $\mathbf{n}$ è la combinazione lineare di due vettori linearmente indipendenti e quindi, per essere identicamente nulla, devono essere identicamenti nulli i coefficienti. Ma allora la curvatura è identicamente nulla e la curva non è biregolare.

2. se $\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{v} \not\equiv 0$ allora dividendo si ottiene $k(s) = -\tau(s)$.

e in entrambi i casi vale $|k(s)| = |\tau(s)|$, cioè la tesi.

Esercizio 3. (10 punti) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sin(x)\, e^y\}$$

1. mostrare che S è una superficie regolare e orientabile;
2. calcolare la curvatura Gaussiana di S e dimostrare che tutti i punti di S sono iperbolici;
3. calcolare la curvatura media di S e determinare i punti di S in cui la curvatura media è nulla;

Soluzione.

1. la superficie è il grafico di una funzione differenziabile e quindi è regolare e orientabile (una sola carta)
2. una parametrizzazione è

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \sin(u)\, e^v)$$

Le derivate parziali sono:

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, \cos(u)\, e^v), \qquad \mathbf{x}_v = (0, 1, \sin(u)\, e^v)$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-\cos(u)\, e^v, -\sin(u)\, e^v, 1)$$

Calcoliamo ora la prima e la seconda forma fondamentale. La prima forma è data da:

- $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + \cos^2(u)\, e^{2v}$
- $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \cos(u) \sin(u)\, e^{2v}$
- $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1 + \sin^2(u)\, e^{2v}$

e si ha

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 = EG - F^2 = 1 + e^{2v}$$

Le derivate seconde sono

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, -\sin(u)\, e^v) \qquad \mathbf{x}_{uv} = (0, 0, \cos(u)\, e^v) \qquad \mathbf{x}_{vv} = (0, 0, \sin(u)\, e^v)$$

Il vettore normale è:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(-\cos(u)\, e^v, -\sin(u)\, e^v, 1)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2v}}}(-\cos(u)\, e^v, -\sin(u)\, e^v, 1)$$

e quindi la seconda forma è data da

- $e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = \dfrac{-\sin(u)\, e^v}{\sqrt{1 + e^{2v}}}$
- $f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \dfrac{\cos(u)\, e^v}{\sqrt{1 + e^{2v}}}$
- $g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = \dfrac{\sin(u)\, e^v}{\sqrt{1 + e^{2v}}}$

Curvatura Gaussiana:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{e^{2v}}{(1 + e^{2v})^2}$$

da cui si vede che la curvatura Gaussiana è sempre negativa e cioè tutti i punti sono iperbolici

3. La curvatura media vale

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{\sin(u)\, e^{3v}}{(1 + e^{2v})^{3/2}}$$

e H si annulla in tutti i punti della forma $\mathbf{x}(k\pi, v) = (k\pi, v, 0)$ e cioè nei punti di intersezione della superficie S con il piano $z = 0$.

Esercizio 4. (10 punti) In $\mathbb{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) definiamo la forma

$$\omega = x_3 x_4 \, dx_1 \wedge dx_2 + x_2 x_4 \, dx_1 \wedge dx_3 + x_2 x_3 \, dx_1 \wedge dx_4$$

1. calcolare $d\omega$ e $*\omega$;
2. calcolare $d(*\omega)$ e $\omega \wedge *\omega$;
3. determinare, se esiste, una 1-forma η tale che $d\eta = \omega$.

Soluzione.

$$\begin{aligned} d\omega &= 0 \\ *\omega &= x_3 x_4 \, dx_3 \wedge dx_4 - x_2 x_4 \, dx_2 \wedge dx_4 + x_2 x_3 \, dx_2 \wedge dx_3 \\ d(*\omega) &= 0 \\ \omega \wedge *\omega &= \left(x_3^2 x_4^2 + x_2^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

La forma ω è chiusa su $\mathbb{R}^3$ e quindi è esatta per il Lemma di Poincaré. Osserviamo che si può scrivere $\omega = dx_1 \wedge \psi$, dove $\psi = x_3 x_4 \, dx_2 + x_2 x_4 \, dx_3 + x_2 x_3 \, dx_4$ e la forma ψ è chiusa ($d\psi = 0$).

Basta allora porre

$$\eta = x_1 \psi = x_1 x_3 x_4 \, dx_2 + x_1 x_2 x_4 \, dx_3 + x_1 x_2 x_3 \, dx_4$$

Si ha

$$d\eta = dx_1 \wedge \psi + x_1 d\psi = dx_1 \wedge \psi = \omega$$

Osserviamo che la soluzione non è unica. Per esempio, un'altra soluzione è

$$\eta = -x_2 x_3 x_4 \, dx_1$$