Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 9 luglio 2019

COGNOME .... **NOME** ....

Compito n. 1

Esercizio 1. (8 punti) Data la curva (contenuta nel piano $z = 0$)

$$\alpha(t) = (\cos^3 t,\, \sin^3 t, 0), \quad t \in [0, 2\pi]$$

1. stabilire per quali punti la curva non è regolare;
2. calcolare la lunghezza dell'arco di curva fra due punti singolari;
3. calcolare la curvatura nei punti regolari.

Esercizio 2. (4 punti) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata per arcolunghezza. Ricordiamo che l'*indicatrice delle tangenti* di α è la curva data dal versore tangente

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$$

Sia ora $\sigma(t) = (a\cos t,\, a\sin t,\, bt)$ un'elica circolare retta. Dimostrare che l'indicatrice delle tangenti di σ è una circonferenza con centro sull'asse z e calcolarne il raggio.

Esercizio 3. (10 punti) Sia data la curva (contenuta nel piano $y = 0$)

$$\alpha(u) = (u,\, 0,\, \log u)$$

1. Costruire una parametrizzazione locale $(D, \mathbf{x})$ della superficie S generata dalla rotazione della curva α attorno all'asse z.
2. Trovare la curvatura Gaussiana e media in un punto qualsiasi di S.
3. Calcolare la curvatura normale nel punto $P = (1, 0, 0)$ e nella direzione del **versore** tangente alla curva $\gamma(t) = \mathbf{x}(t,\, 1 - t^2)$.

Esercizio 4. (10 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione differenziabile definita da

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

e siano

$$\alpha = z\,dx - x\,dy, \qquad \beta = 2y\,dx \wedge dz$$

due forme differenziali su $\mathbb{R}^3$.

1. calcolare $d\alpha$ e $d\beta$;
2. calcolare $f^*(\alpha)$ e $f^*(\beta)$;
3. calcolare $\alpha \wedge \beta$
4. determinare, se esiste, una forma η tale che $d\eta = \alpha \wedge \beta$.