Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 16 settembre 2019

COGNOME .... **NOME** ....

Compito n. 1

Esercizio 1. (8 punti) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (t - a\sin t,\, 1 - \cos t,\, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

1. stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è regolare;
2. stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è biregolare;
3. stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana e per ognuno dei valori trovati determinare il piano che contiene la curva;

Esercizio 2. (4 punti) Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura costante $k_0 > 0$ e contenuta in una sfera di raggio $R > 0$, dove $R \geq 1/k_0$. Dimostrare che la curva è piana (e quindi è un arco di circonferenza).

Esercizio 3. (10 punti) Sia S la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\mathbf{x}(u,v) = (u + 2v,\, 2u - v,\, uv), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Dimostrare che la parametrizzazione è regolare;
2. Calcolare la curvatura Gaussiana e la curvatura media in tutti i punti di S;
3. Trovare le curvature principali e le direzioni principali di curvatura nell'origine $O = (0,0,0) \in S \subseteq \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. (10 punti) In $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x_1, x_2, x_3) definiamo la forma

$$\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 - x_2\, dx_1 \wedge dx_3 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

1. calcolare $d\omega$ e $*\omega$;
2. calcolare $d(*\omega)$ e $\omega \wedge *\omega$;
3. Sia S^2 la sfera di centro l'origine e raggio R. Calcolare $\displaystyle\int_{S^2} \omega$.