Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 14 febbraio 2020

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (8 punti) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (3t^2,\, 1 + 3t,\, at^3), \quad t \in \mathbb{R},$$

1. Stabilire per quali valori di a la curva è biregolare.
2. Stabilire per quali valori di a la curva è piana.
3. Posto $a = 2$, determinare la curvatura e la torsione in un generico punto di α.

Soluzione. Calcoliamo subito le derivate:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= (6t, 3, 3at^2) \\ \ddot{\alpha} &= (6, 0, 6at) \\ \dddot{\alpha} &= (0, 0, 6a) \\ \dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} &= 18(at, -at^2, -1) \end{aligned}$$

1. Dal calcolo di $\dot{\alpha}$ si vede che la curva è sempre regolare. Studiamo quando la curva è biregolare: la curvatura è $k(t) = \dfrac{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|}{\|\dot{\alpha}\|^3}$. Poiché $\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}$ è sempre diverso da 0 (la terza componente è costante e non nulla) $k(t)$ è sempre diversa da 0 e cioè la curva è biregolare.
2. Poiché la curva è biregolare, la curva è piana se e solo se la torsione è nulla. Per annullare la torsione basta annullare il numeratore $(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}$. Si ottiene
$$(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha} = 18 \cdot 6a = -108a$$
e dunque la curva è piana se e solo se $a = 0$.
3. Ponendo $a = 2$ si ottiene:
$$\begin{aligned} \|\dot{\alpha}\| &= \sqrt{36t^2 + 9 + 36t^4} = \sqrt{9(1 + 2t^2)^2} = 3(1 + 2t^2) \\ \|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\| &= \sqrt{18^2(4t^2 + 4t^4 + 1)} = 18(1 + 2t^2) \end{aligned}$$

e dunque

$$k(t) = \frac{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|}{\|\dot{\alpha}\|^3} = \frac{18(1+2t^2)}{27(1+2t^2)^3} = \frac{2}{3(1+2t^2)^2}$$

$$\tau(t) = \frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|^2} = \frac{-216}{18^2(1+2t^2)^2} = -\frac{2}{3(1+2t^2)^2}$$

Esercizio 2. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ il suo grafico, con la parametrizzazione regolare $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

Se $P = (u_0, v_0)$ è un punto critico di f, dimostrare che la seconda forma fondamentale di S in $\mathbf{x}(P)$ è uguale all'Hessiano della funzione f in P.

Soluzione.
In un punto critico $f_u(P) = f_v(P) = 0$ e quindi $N = \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$. Le derivate seconde sono

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, f_{uu}), \qquad \mathbf{x}_{uv} = (0, 0, f_{uv}), \qquad \mathbf{x}_{vv} = (0, 0, f_{vv})$$

e perciò

$$e = \mathbf{x}_{uu} \cdot N = f_{uu}, \quad f = \mathbf{x}_{uv} \cdot N = f_{uv}, \quad g = \mathbf{x}_{vv} \cdot N = f_{vv}$$

e

$$II = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix} = H(f)$$

Esercizio 3. (10 punti) Sia S la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\mathbf{x}(u,v) = (v\cos u,\ v\sin u,\ u^2), \quad (u,v) \in D$$

1. Determinare D in modo tale che S sia regolare.
2. Trovare la curvatura Gaussiana e media in un punto qualsiasi di S.
3. Sia $P = \mathbf{x}(\pi, 0)$. Dimostrare che $\mathbf{u} = \frac{1}{5}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) \in T_P S$.
4. Calcolare la curvatura normale di S nel punto P nella direzione del versore $\mathbf{u}$.

Soluzione.

1. Le derivate parziali sono:

$$\mathbf{x}_u = (-v\sin u, v\cos u, 2u), \qquad \mathbf{x}_v = (\cos u, \sin u, 0)$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-2u\sin u, 2u\cos u, -v)$$

e si ha

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 = EG - F^2 = \sqrt{4u^2\sin^u + 4u^2\cos^2 u + v^2} = \sqrt{4u^2 + v^2}$$

e dunque

$$D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

2. Calcoliamo ora la prima e la seconda forma fondamentale. La prima forma è data da:

- $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 4u^2 + v^2$
- $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$
- $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1$

Le derivate seconde sono

$$\mathbf{x}_{uu} = (-v\cos u, -v\sin u, 2) \qquad \mathbf{x}_{uv} = (-\sin u, \cos u, 0) \qquad \mathbf{x}_{vv} = (0,0,0)$$

Il vettore normale è:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(-2u\sin u, 2u\cos u, -v)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4u^2 + v^2}}(-2u\sin u, 2u\cos u, -v)$$

e quindi la seconda forma è data da

- $e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = -\dfrac{2v}{\sqrt{4u^2+v^2}}$
- $f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \dfrac{2u}{\sqrt{4u^2+v^2}}$
- $g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0$

Curvatura Gaussiana:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\dfrac{4u^2}{4u^2+v^2}}{4u^2+v^2} = \boxed{-\frac{4u^2}{(4u^2+v^2)^2}}$$

Curvatura media:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{0 - 0 - \dfrac{2v}{\sqrt{4u^2+v^2}}}{4u^2+v^2} \\ &= \boxed{-\frac{2v}{(4u^2+v^2)^{3/2}}} \end{aligned}$$

3. $P = \mathbf{x}(\pi, 0) = (0, 0, \pi^2)$ e una base dello spazio tangente è data da:

$$\mathbf{x}_u(\pi, 0) = (0, 0, 2\pi) = 2\pi\mathbf{k}, \qquad \mathbf{x}_v(\pi, 0) = (-1, 0, 0) = -\mathbf{i}$$

   $\mathbf{u}$ è combinazione lineare dei vettori della base e dunque $\mathbf{u} \in T_P S$

4. La curvatura normale si calcola con la seconda forma fondamentale, che nel punto P è

$$II = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Dobbiamo scrivere il vettore $\mathbf{u}$ in termini della base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. Si ha:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{5}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) = \frac{1}{5}\left(-3\mathbf{x}_v + 4\frac{1}{2\pi}\mathbf{x}_u\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{\pi}\mathbf{x}_u - 3\mathbf{x}_v\right)$$

   Si ha dunque:

$$\begin{aligned} k_n(\mathbf{u}) &= II(\mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/\pi \\ -3 \end{pmatrix} \qquad = -\frac{12}{25\pi} \end{aligned}$$

Esercizio 4. (10 punti) Sia ω la $(n-1)$-forma differenziale su $\mathbb{R}^n$ definita da

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

dove $\widehat{dx_i}$ significa che il termine dx_i non è presente.

1. calcolare $d\omega$ e $*\omega$
2. calcolare $\omega \wedge *\omega$
3. le forma $d\omega$ e $\omega \wedge *\omega$ sono entrambe delle n-forme e perciò sono multiple l'una dell'altra. Determinare il coefficiente di proporzionalità.

Soluzione.

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \boxed{-n \, (dx_1 \wedge \ldots \cdots \wedge dx_n)}
\end{aligned}$$

Si ha

$$*(dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) = (-1)^{\sigma} dx_i$$

dove σ è la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i-1 & i & i+1 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & \ldots & i-1 & i+1 & i+2 & \ldots & n & i \end{pmatrix}$$

e cioè σ è il ciclo $(i \ i+1 \ i+2 \ \ldots \ n)$ di lunghezza $(n-i+1)$ e quindi di parità $n-i$. Perciò $(-1)^{\sigma} = (-1)^{n-i}$ e quindi

$$\begin{aligned}
*\omega &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i (-1)^{\sigma} dx_i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (-1)^{n-i} x_i \, dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-2i} x_i \, dx_i = \boxed{(-1)^n \sum_{i=1}^{n} x_i \, dx_i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\omega \wedge *\omega &= \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \right) \wedge \left((-1)^n \sum_{i=1}^{n} x_i \, dx_i \right) \\
&= (-1)^n \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i (-1)^{n-i} \, x_i^2 \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= (-1)^n \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-2i} \, x_i^2 \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= (-1)^n (-1)^n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}
\end{aligned}
$$

Si ha dunque:

$$
\boxed{\omega \wedge *\omega = \left(-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) d\omega}
$$