Geometria 3 – a.a. 2020/21
Esercizi per giovedì 4 marzo 2021

1 Esercizi

Esercizio 1.1. Sia $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza. Dimostrare che

$$\frac{d^3}{ds}\alpha = -k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b}$$

Soluzione. Scriviamo le derivate

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \mathbf{t} \\
\alpha'' &= k\mathbf{n} \\
\alpha''' &= k'\mathbf{n} + k\mathbf{n}' = k'\mathbf{n} + k(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})
\end{aligned}$$

dalla seconda formula di Frenet. Riordinando i termini si ha la tesi.

Esercizio 1.2. Sia $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza. Per ogni $r \in \mathbb{R}$ si consideri la curva

$$\alpha_r(s) := \alpha(s) + r\mathbf{b}(s)$$

dove $\mathbf{b}(s)$ è il vettore binormale di α. Dimostrare che

a. α_r è sempre una curva regolare. Calcolare la curvatura di α_r e determinare una condizione sufficiente su α affinché α_r sia biregolare

b. α è piana se e solo se il vettore binormale a α_r è $\pm\mathbf{b}$ (sotto l'ipotesi α_r biregolare)

Soluzione. La curva α_r non è parametrizzata per arcolunghezza. Per chiarezza, scriveremo $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ per indicare il triedro di α e $\mathbf{t}_r$, $\mathbf{n}_r$, $\mathbf{b}_r$ per indicare il triedro di α_r.

a. Scriviamo le derivate.

$$\alpha_r' = \alpha' + r\mathbf{b}' = \mathbf{t} - r\tau\mathbf{n}$$

da cui si vede che α_r è regolare, perché la componente $\mathbf{t}$ del vettore tangente α_r' è sempre diversa da 0. Poiché $\mathbf{t}$ ed $\mathbf{n}$ sono ortogonali di norma 1, si vede anche che la norma di α_r' è:

$$\|\alpha_r'\| = \sqrt{1 + r^2\tau^2}$$

e quindi in generale non vale 1 e cioè la parametrizzazione di α_r non è per arcolunghezza.

Calcoliamo quindi la curvatura di α_r con le formule per parametro qualunque. Per dimostrare che è sempre non nulla, basta calcolare il numeratore $\|\alpha_r' \wedge \alpha_r''\|$. Per dimostrare che la norma è sempre diversa da 0 basta vedere che α_r' e α_r'' sono linearmente indipendenti.

$$\begin{aligned}\alpha_r'' &= \mathbf{t}' - r\tau'\mathbf{n} - r\tau\mathbf{n}' \\ &= k\mathbf{n} - r\tau'\mathbf{n} - r\tau(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) \\ &= rk\tau\mathbf{t} + (k - r\tau')\mathbf{n} - r\tau^2\mathbf{b}\end{aligned}$$

Nei punti in cui $\tau(s) \neq 0$, allora α_r'' ha componente $\mathbf{b}$ non nulla, mentre α_r' è combinazione lineare di $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$. Dunque sono linearmente indipendenti.

Consideriamo ora un punto $s_0 \in (a, b)$ per cui $\tau(s_0) = 0$. Allora

$$\alpha_r'' = (k - r\tau')\mathbf{n}$$

mentre α_r' ha componente $\mathbf{t}$ non nulla. Sono dunque linearmente indipendenti, se $k(s_0) - r\tau'(s_0) \neq 0$.

ATTENZIONE: Queste condizioni NON sono sempre soddisfatte: per esempio, prendiamo

$$r = 1, \qquad k(s) \equiv 1, \qquad \tau(s) = s$$

Per il Teorema Fondamentale, c'è una curva α con k, τ come sopra e nel punto $s = 0$, la curvatura di α_r è nulla.

SI possono costruire molti altri esempi come segue: si prende τ tale che τ' sia strettamente positivo (in particolare τ è strettamente crescente) e $k = r\tau'$. Allora nei punti in cui $\tau = 0$ la curva α_r ha curvatura nulla. Poiché τ è strettamente crescente, c'è un solo punto di questo genere.

b. se α è piana, allora il vettore binormale è costante e dunque α_r è la traslata di α per il vettore costante $\mathbf{b}$. Dunque α e α_r hanno lo stesso vettore binormale.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{b}_r(s) = \pm\mathbf{b}(s)$. Il vettore binormale è nella direzione del prodotto esterno $\alpha_r' \wedge \alpha_r''$. Dal calcolo precedente si ha:

$$\begin{aligned}\alpha_r' \wedge \alpha_r'' &= (k - r\tau')\mathbf{t} \wedge \mathbf{n} - r\tau^2\mathbf{t} \wedge \mathbf{b} - r^2k\tau^2\mathbf{n} \wedge \mathbf{t} + r^2\tau^3\mathbf{n} \wedge \mathbf{b} \\ &= r^2\tau^3\mathbf{t} + r\tau^2\mathbf{n} + (k - r\tau' + r^2k\tau^2)\mathbf{b}\end{aligned}$$

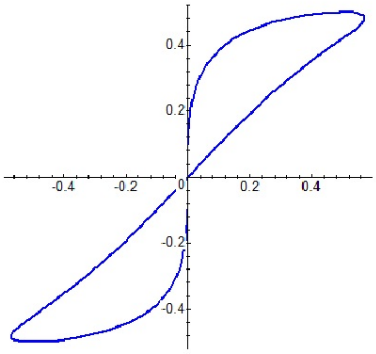
Affinché questo vettore sia parallelo a $\mathbf{b}$, deve avere componenti $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ identicamente nulle e quindi $\tau(s) \equiv 0$. Ma questo significa che la curva α è piana.

Poiché α è piana si ha anche che $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}$ è costante. Inoltre in questo caso, $\alpha_r' \wedge \alpha_r'' = k\,\mathbf{b}$ e poiché la curvatura $k(s)$ è positiva per definizione, $\mathbf{b}_r = \mathbf{b}$ e cioè il caso $\mathbf{b}_r = -\mathbf{b}$ è impossibile.

Esercizio 1.3. Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t}{1+t^2} \right)$$

Dimostrare che è una parametrizzazione regolare iniettiva ma non un omeomorfismo con l'immagine.



Soluzione. La curva $\alpha(t) = \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t}{1+t^2} \right)$ ha vettore tangente

$$\alpha'(t) = \left(\frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2}, \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \right)$$

La seconda componente si annulla solo per $t = 1, -1$ e per questi valori la prima componente non è nulla. Dunque $\alpha'(t)$ non si annulla mai e la curva è regolare.

Dimostriamo che $\alpha(t)$ è iniettiva. Siano $s, t \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha(s) = \alpha(t)$. Osserviamo che in tal caso s e t hanno lo stesso segno, perché i denominatori sono sempre positivi e quindi il segno delle frazioni è dato dal numeratore. Inoltre, $t = 0$ se e solo se $s = 0$ e quindi possiamo supporre $st \neq 0$.

Scriviamo dunque

$$\frac{t}{1+t^2} = \frac{s}{1+s^2}, \qquad \frac{t}{1+t^4} = \frac{s}{1+s^4}$$

Da queste si ricavano

$$\frac{s}{t} = \frac{1+s^2}{1+t^2}, \qquad \frac{s}{t} = \frac{1+s^4}{1+t^4}$$

uguagliando si ha

$$\frac{1+s^2}{1+t^2} = \frac{1+s^4}{1+t^4}$$

moltiplicando si ha

$$(1+s^2)(1+t^4) = (1+t^2)(1+s^4)$$

Semplici passaggi danno

$$\begin{gathered}(1+s^2)(1+t^4)=(1+t^2)(1+s^4)\\ 1+s^2+t^4+s^2t^4=1+t^2+s^4+t^2s^4\\ [s^2-t^2]+[t^4-s^4]+s^2t^2[t^2-s^2]\\ -[t^2-s^2]+[t^2-s^2][t^2+s^2]+s^2t^2[t^2-s^2]\\ [t^2-s^2][s^2t^2+s^2+t^2-1]=0\end{gathered}$$

Dall'ultima relazione si vede che una soluzione è $t^2 = s^2$ e cioè $t = \pm s$. Poiché t e s hanno lo stesso segno, otteniamo $t = s$.

Altre possibili soluzioni vengono da

$$s^2t^2 + s^2 + t^2 - 1 = 0$$

Ricavando s^2 e t^2 si ottiene

$$s^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad t^2 = \frac{1-s^2}{1+s^2}$$

e dividendo

$$\frac{s^2}{t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1+s^2}{1-s^2} = \frac{1-t^2}{1-s^2}\cdot\frac{1+s^2}{1+t^2}$$

e ricordando che $s/t = (1+s^2)/(1+t^2)$, possiamo semplificare ottenendo

$$\frac{s}{t} = \frac{1-t^2}{1-s^2}, \qquad \frac{s}{t} = \frac{1+s^2}{1+t^2}$$

dove il primo uguale si ottiene dividendo, e il secondo è quello che sapevamo già dall'inizio. Uguagliando, si ha finalmente

$$\frac{1-t^2}{1-s^2} = \frac{1+s^2}{1+t^2}$$

e moltiplicando

$$(1-t^2)(1+t^2) = (1-s^2)(1+s^2)$$

da cui si ottiene

$$1 - t^4 = 1 - s^4$$

e perciò $t^4 = s^4$ da cui di nuovo $t = \pm s$ (ricordiamo che sono numeri *reali*) e si conclude come prima.

Poniamo ora $\alpha(\mathbb{R}) = C$ e dimostriamo ora che α non è un omeorfismo da $\mathbb{R}$ in C con la topologia di sottospazio. Poiché α è biunivoca sull'immagine, l'inversa di α è continua se e solo se α è aperta. Sia allora $(-\varepsilon, \varepsilon)$ un intorno aperto dell'origine in $\mathbb{R}$. L'immagine di questo aperto è un intervallo sulla curva C che contiene l'origine $(0,0) = \alpha(0)$. Dimostriamo che questo intervallo non è aperto nella topologia di sottospazio e quindi α non è aperta.

Ogni intorno di $(0,0)$ in C è l'intersezione di un disco aperto di centro l'origine e C e in particolare contiene punti al di fuori dell'immagine dell'intervallo $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Questo è chiaro dalla figura. Una dimostrazione rigorosa che non fa riferimento alla figura è la seguente: si ha

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = (0,0)$$

Dunque in ogni intorno dell'origine ci sono punti con $t > M$, per M sufficientemente grande. Questi punti non stanno nell'intervallo $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Allora l'immagine $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon)$ non è un intorno dell'origine e quindi non è intorno di ogni suo punto. Dunque $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon)$ non è aperto.

Esercizio 1.4. Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\alpha(t) = \left(2\sqrt{2}\, t - \sin t, 2\sqrt{2} \sin t + t, 3 \cos t\right)$$

Dimostrare che la curva definita da α è un'elica circolare.

Soluzione. Dal teorema fondamentale delle curve, basta dimostrare che α ha curvatura e torsione costanti. Calcoliamo con le formule per parametrizzazione qualunque.

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \left(2\sqrt{2} - \cos t, 2\sqrt{2}\, \cos t + 1, -3 \sin t\right) \\
\alpha'' &= \left(\sin t, -2\sqrt{2} \sin t, -3 \cos t\right) \\
\alpha''' &= \left(\cos t, -2\sqrt{2} \cos t, 3 \sin t\right) \\
\alpha' \wedge \alpha'' &= \left(-3 \cos t - 6\sqrt{2}, -3 + 6\sqrt{2} \cos t, -9 \sin t\right) \\
(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha''' &= -27
\end{aligned}$$

Calcolando le norme si ha:

$$\begin{aligned}
\|\alpha'\| &= 3\sqrt{2} \\
\|\alpha' \wedge \alpha''\| &= 9\sqrt{2}
\end{aligned}$$

e quindi

$$k = \frac{1}{6}, \qquad \tau = -\frac{1}{6}$$

Dunque α è un'elica circolare.

Esercizio 1.5. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza e supponiamo che $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. esistono due costanti $c, d \in \mathbb{R}$ non entrambe nulle tali che $ck + d\tau \equiv 0$
2. esiste un versore costante non nullo $\mathbf{v}_0$ tale che $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v}_0 \rangle$ è costante
3. esiste un piano H vettoriale tale che $\mathbf{n}(s) \in H$ per ogni $s \in I$. Questa condizione si può esprimere in modo equivalente come: esiste un vettore non nullo costante $\mathbf{v}$ tale che $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{v} \rangle \equiv 0$.
4. esiste un versore costante non nullo $\mathbf{v}_0$ tale che $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{v}_0 \rangle$ è costante
5. la curva α ha una parametrizzazione della forma

   $$\alpha(s) = \eta(s) + (s - s_0)\, \mathbf{v}$$

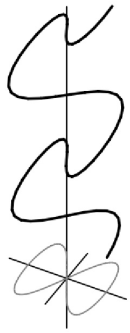
   dove η è una curva piana parametrizzata per arcolunghezza e $\mathbf{v}$ è un vettore costante ortogonale al piano contenente il sostegno di η

Suggerimento: dimostrare le catene di implicazioni

$$(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (1) \qquad \text{e} \qquad (2) \implies (5) \implies (1)$$

Una curva α soddisfacente una qualsiasi di queste condizioni equivalenti è detta elica (generalizzata) (vedi figura). Esprimere infine curvatura, torsione e triedro di Frenet di α in funzione della curvatura e del triedro di Frenet di η.

Osservazione. L'ipotesi sulla torsione forse non è necessaria. È semplice vedere che tutte le condizioni tranne la (4) implicano che la torsione non è mai nulla. Forse si può dimostrare che anche la (4) implica che la torsione non è mai nulla, ma non ci sono riuscito. L'ipotesi sulla torsione si usa solo nella dimostrazione di (4) $\implies$ (1) e la rende piuttosto semplice.



Soluzione.
$\boxed{(1) \implies (2)}$ Consideriamo la prima e la terza formula di Frenet:

$$0 \equiv (ck + d\tau)\mathbf{n} = c\mathbf{t}' - d\mathbf{b}' = (c\mathbf{t} - d\mathbf{b})'$$

Dunque il vettore $\mathbf{v} = c\mathbf{t} - d\mathbf{b}$ è costante e non nullo, perché ha almeno una coordinata nella base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ diversa da zero. Poniamo $\mathbf{v}_0 = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$. Possiamo notare che $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{c^2 + d^2}$. Calcolando il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{v}_0 \rangle = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\langle \mathbf{t}, c\mathbf{t} - d\mathbf{b} \rangle = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

si vede che è costante e quindi $\mathbf{v}_0$ è il vettore cercato.

$\boxed{(2) \implies (3)}$ La funzione $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v}_0 \rangle$ è costante e quindi la sua derivata è identicamente nulla. Ricordando che il vettore $\mathbf{v}_0$ è costante si ha

$$0 \equiv \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v}_0 \rangle' = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{v}_0 \rangle = k(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{v}_0 \rangle$$

Poiché la curva è biregolare, la curvatura $k(s) \neq 0$ e quindi per ogni $s \in I$ il vettore $\mathbf{n}(s)$ è perpendicolare al vettore costante $\mathbf{v}_0$.

Dunque il piano H è il piano (sottospazio vettoriale) perpendicolare a $\mathbf{v}_0$.

$\boxed{(3) \implies (4)}$ Sia $\mathbf{v}_0$ un versore perpendicolare al piano H e quindi per ogni $s \in I$ si ha $\mathbf{n}(s) \perp \mathbf{v}_0$. Questo dice che il vettore costante $\mathbf{v}_0$ è combinazione lineare di $\mathbf{t}$ e $\mathbf{b}$ e possiamo scrivere

$$\mathbf{v}_0 = c(s)\,\mathbf{t}(s) + d(s)\,\mathbf{b}(s)$$

dove $c(s)$, $d(s)$ sono funzioni. Poiché il vettore è costante la sua derivata è identicamente nulla. Derivando e usando le formule di Frenet si ha

$$c'(s)\,\mathbf{t}(s) + (c(s)k(s) - d(s)\tau(s))\mathbf{n}(s) + d'(s)\,\mathbf{b}(s) \equiv 0$$

Poiché i vettori formano una base, deve essere

$$c'(s) = d'(s) \equiv 0$$

e quindi $c(s) = c$ e $d(s) = d$ sono costanti, non entrambe nulle perché $\mathbf{v}_0$ è un versore e quindi non è nullo. Calcolando il prodotto scalare di $\mathbf{v}_0$ con $\mathbf{b}$ si ha che

$$\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{v}_0 \rangle = d$$

è costante.

$\boxed{(4) \implies (1)}$ Sia $\mathbf{v}_0$ il versore costante dato per ipotesi. Scrivendolo nella base di Frenet si ha:

$$\mathbf{v}_0 = c(s)\,\mathbf{t}(s) + d(s)\,\mathbf{n}(s) + e(s)\,\mathbf{b}(s)$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{b}(s)$ si ottiene

$$\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{v}_0 \rangle = e(s)$$

e quindi $e(s) \equiv e$, una costante. Derivando adesso il vettore costante $\mathbf{v}_0$ e usando le formule di Frenet si ha

$$\begin{aligned} 0 &\equiv c'(s)\mathbf{t}(s) + c(s)\mathbf{t}'(s) + d'(s)\mathbf{n}(s) + d(s)\mathbf{n}'(s) + e\mathbf{b}'(s) \\ &= (c'(s) - k(s)d(s))\mathbf{t}(s) + (c(s)k(s) + d'(s) - e\tau(s))\mathbf{n}(s) + d(s)\tau(s)\mathbf{b}(s) \end{aligned}$$

e quindi i tre coefficienti della combinazione lineare sono identicamente nulli. Si ha:

1. dal coefficiente di $\mathbf{b}$, poiché $\tau(s) \neq 0\ \forall s \in I$ si ha $d(s) \equiv 0$. In particolare $d(s)$ è costante e quindi anche $d'(s) \equiv 0$;
2. ora dal coefficiente di $\mathbf{t}$ si ha $c'(s) \equiv 0$ e quindi $c(s) \equiv c$ è costante;
3. ora dal coefficiente di $\mathbf{n}$ si ha $ck(s) - e\tau(s) \equiv 0$.

Osserviamo ancora che c, e non sono entrambi nulli perché $\mathbf{v}_0 = c\mathbf{t} + e\mathbf{b}$ e poiché il vettore $\mathbf{v}_0$ non è nullo, almeno una sua coordinata è diversa da 0 e quindi abbiamo la tesi.

$\boxed{(2) \implies (5)}$ Sia $s_0 \in I$ un punto fissato. A meno di una traslazione possiamo fissare l'origine del sistema di coordinate nel punto $\alpha(s_0)$. A meno di una rotazione, possiamo portare il versore $\mathbf{v}_0$ nel versore dell'asse z e sia H il piano xy (passante per $\alpha(s_0) = 0$ e perpendicolare a $\mathbf{v}_0$). Sia $\beta(s)$ la proiezione di α sul piano H. Una equazione parametrica di $\beta(s)$ è

$$\beta(s) = \alpha(s) - \langle \alpha(s), \mathbf{v}_0 \rangle \, \mathbf{v}_0$$

Questa parametrizzazione non è in generale, per arcolunghezza.

La curva $\beta(s)$ è piana ma non è quella voluta, perché la parametrizzazione non è del tipo richiesto. Calcoliamo le derivate

$$\begin{aligned} &\beta'(s) = \alpha'(s) - \langle \alpha'(s), \mathbf{v}_0 \rangle \, \mathbf{v}_0 = \mathbf{t}_\alpha(s) - \langle \mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{v}_0 \rangle \, \mathbf{v}_0 = \mathbf{t}_\alpha(s) - c \, \mathbf{v}_0 \\ &\beta''(s) = \mathbf{t}'_\alpha(s) = k_\alpha(s) \mathbf{n}_\alpha(s) \end{aligned}$$

dove $\langle \mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{v}_0 \rangle \equiv c$ è costante per ipotesi. Poiché la curva $\beta(s)$ è piana, il vettore binormale

$$\mathbf{b}_\beta(s) = \frac{\beta' \wedge \beta''}{\|\beta' \wedge \beta''\|}$$

è costante e perpendicolare al piano H e quindi $\mathbf{b}_\beta = \pm \mathbf{v}_0$.

Se consideriamo adesso la curva

$$\eta(s) = \alpha(s) - (s - s_0) c \mathbf{v}_0$$

si hanno le derivate

$$\begin{aligned} \eta'(s) &= \alpha'(s) - c\mathbf{v}_0 = \mathbf{t}_\alpha(s) - c\mathbf{v}_0 \\ \eta''(s) &= \mathbf{t}'_\alpha(s) = k_\alpha(s) \mathbf{n}_\alpha(s) \end{aligned}$$

che sono uguali alle precedenti e dunque il vettore

$$\mathbf{b}_\eta(s) = \frac{\eta' \wedge \eta''}{\|\eta' \wedge \eta''\|} = \frac{\beta' \wedge \beta''}{\|\beta' \wedge \beta''\|} = \mathbf{b}_\beta(s)$$

è costante. Notiamo in particolare che $\eta' \wedge \eta'' \neq 0$ e quindi la curva η è biregolare. Poiché il vettore binormale è costante, $\eta(s)$ è una curva piana (contenuta ancora in H perché passa per l'origine per $s = s_0$ ed ha lo stesso vettore binormale di β) si ha:

$$\alpha(s) = \eta(s) + (s - s_0)\mathbf{v}$$

come richiesto. Questa non è ancora le tesi, perché la curva η non è parametrizzata per arcolunghezza.

Dal calcolo precedente

$$\|\eta'(s)\|^2 = \langle (\mathbf{t}_\alpha(s) - c\mathbf{v}_0), (\mathbf{t}_\alpha(s) - c\mathbf{v}_0) \rangle = 1 - 2c^2 + c^2 = 1 - c^2$$

Poiché i vettori $\mathbf{t}_\alpha(s)$ e $\mathbf{v}_0$ hanno entrambi norma 1 il loro prodotto scalare ha valore assoluto minore o uguale ad 1:

$$|c| = |\langle \mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{v}_0 \rangle| \leq 1$$

Sappiamo già che η è biregolare e quindi $|c| < 1$. Infatti, se $c = \pm 1$, allora $\mathbf{t}_\alpha(s)$ è parallelo ad un vettore costante e quindi è costante. Allora la curva $\alpha(s)$ è una retta e non è biregolare, e quindi questo caso è escluso. Poiché il modulo della derivata è costante, è facile riparametrizzare η per arcolunghezza, ponendo $\sigma = \sqrt{1-c^2}\,s$

$$\eta(\sigma) = \alpha\left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-c^2}}\right) - (\sigma - \sigma_0)\,\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\mathbf{v}_0$$

e questa è la curva η richiesta.

Ultima osservazione: dalla scrittura

$$\alpha(s) = \eta(s) + (s - s_0)\mathbf{v}$$

si ha

$$\alpha'(s) = \eta'(s) + \mathbf{v}$$

e quindi

$$\|\alpha'(s)\|^2 = \|\eta'(s) + \mathbf{v}\|^2 = \|\eta'(s)\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

e quindi α ed η non sono mai contemporaneamente parametrizzate per arcolunghezza, tranne nel caso in cui $\mathbf{v} = 0$. Ma allora α è una curva piana e questo è escluso dall'ipotesi sulla torsione.

$\boxed{(5) \implies (1)}$ Calcoliamo curvatura e torsione di α, usando le formule per parametro qualunque, poiché la parametrizzazione di α non è necessariamente per arcolunghezza. Indichiamo con $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ i vettori del triedro di η e allo stesso modo con k la curvatura di η (la torsione è nulla perché η è piana).

La curva η è piana e quindi il suo vettore binormale $\mathbf{b}$ è costante e perpendicolare al piano della curva. Dunque

$$\mathbf{v} = c\mathbf{b}$$

è un multiplo di $\mathbf{b}$. Calcoliamo le derivate di α e usiamo le formule di Frenet per η, ricordando che $\mathbf{b}$ è costante e che $\tau \equiv 0$:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \eta' + \mathbf{v} = \mathbf{t} + c\mathbf{b} \\
\alpha'' &= \mathbf{t}' = k\,\mathbf{n} \\
\alpha''' &= k'\mathbf{n} + k\mathbf{n}' = k'\mathbf{n} - k^2\mathbf{t} \\
\alpha' \wedge \alpha'' &= k\mathbf{b} - ck\mathbf{t} \\
(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha''' &= ck^3
\end{aligned}$$

Calcolando le norme si ha (ricordiamo che i vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ sono una terna ortonormale):

$$\begin{aligned}
\|\alpha'\| &= \sqrt{1+c^2} \\
\|\alpha' \wedge \alpha''\| &= k\sqrt{1+c^2}
\end{aligned}$$

Otteniamo dunque, per la curvatura e la torsione di α:

$$k_\alpha = \frac{k\sqrt{1+c^2}}{(1+c^2)^{3/2}} = \frac{k}{1+c^2}$$

$$\tau_\alpha = \frac{ck^3}{k^2(1+c^2)} = \frac{ck}{1+c^2}$$

da cui si vede che il rapporto $\tau_\alpha/k_\alpha = c$ è costante, cioè la tesi.

Esercizio 1.6. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza con curvatura k e torsione τ. Dimostrare che la curvatura k_1 dell'indicatrice delle tangenti di α è tale che

$$k_1^2 = 1 + \frac{\tau^2}{k^2}$$

Soluzione. Denotiamo con $\sigma(s) = \mathbf{t}_\alpha(s) = \alpha'(s)$ l'indicatrice delle tangenti di α. Calcoliamo la curvatura di σ usando le formule per parametro qualunque. Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned}
\sigma' &= \alpha'' = k\mathbf{n}_\alpha \\
\sigma'' &= k'\mathbf{n}_\alpha + k\mathbf{n}'_\alpha = -k^2\mathbf{t}_\alpha + k'\mathbf{n}_\alpha + k\tau\mathbf{b}_\alpha \\
\sigma' \wedge \sigma'' &= -k^3\mathbf{n}_\alpha \wedge \mathbf{t}_\alpha + k^2\tau\mathbf{n}_\alpha \wedge \mathbf{b}_\alpha = k^2\left(\tau\mathbf{t}_\alpha + k\mathbf{b}_\alpha\right) \\
\|\sigma' \wedge \sigma''\| &= k^2\sqrt{k^2 + \tau^2}
\end{aligned}$$

e quindi

$$k_1 = \frac{\|\sigma' \wedge \sigma''\|}{\|\sigma'\|^3} = \frac{k^2\sqrt{k^2 + \tau^2}}{k^3} = \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{k}$$

Elevando al quadrato si ha la tesi.