# Geometria 3 – a.a. 2020/21
# Esercizi per giovedì 25 marzo 2021

## 1 Esercizi

**Esercizio 1.1.** Sia $S$ la superficie nello spazio di equazione

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

(iperboloide a una falda)

1. dimostrare che per ogni numero reale $t$ la retta $\ell_t$ di equazioni cartesiane

$$(x - z)\cos t = (1 - y)\sin t, \quad (x + z)\sin t = (1 + y)\cos t$$

   è contenuta nella superficie $S$

2. dimostrare che ogni punto di $S$ è contenuto in una e una sola delle rette $\ell_t$

3. ottenere da questo una parametrizzazione di $S$

Nota: 1. è facile, 2. è più difficile. Anche se non riuscite a svolgere 1. e/o 2., fate almeno il punto 3. (naturalmente, supponendo veri 1. e 2.).

**Soluzione.**

1. Scriviamo la retta $\ell_t$ in forma parametrica. La retta è data dal sistema

$$\begin{cases} \cos t\, x & + & \sin t\, y & - & \cos t\, z & = & \sin t \\ \sin t\, x & - & \cos t\, y & + & \sin t\, z & = & \cos t \end{cases}$$

Per trovare un vettore $\mathbf{v}$ parallelo alla retta basta calcolare il determinante formale

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t & \sin t & -\cos t \\ \sin t & -\cos t & \sin t \end{vmatrix} = (\sin^2 t - \cos^2 t)\,\mathbf{i} - 2\sin t\cos t\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

che possiamo riscrivere come

$$\mathbf{v} = (-\cos 2t, -\sin 2t, -1)$$

e quindi possiamo prendere $-\mathbf{v} = (\cos 2t, \sin 2t, 1)$ come vettore della retta $\ell_t$. Per trovare un punto di passaggio, poniamo $z = 0$ e risolviamo il sistema: si trova che

$$P_t = (\sin 2t, -\cos 2t, 0) \in \ell_t$$

Dunque le equazioni parametriche di $\ell_t$ sono, usando $s$ come parametro

$$\begin{cases} x &= \sin 2t &+ (\cos 2t)s \\ y &= -\cos 2t &+ (\sin 2t)s \\ z &= & s \end{cases}$$

È adesso immediato sostituire le equazioni parametriche nell'equazione cartesiana della superficie $S$ e verificare che è identicamente soddisfatta (per ogni $t, s \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= (\sin 2t + (\cos 2t)s)^2 + (-\cos 2t + (\sin 2t)s)^2 - s^2 \\ &= (\sin^2 2t + \cos^2 2t) + (2\sin 2t\cos 2t - 2\cos 2t\sin 2t)s + (\cos^2 2t + \sin^2 2t)s^2 - s^2 \\ &= 1 + s^2 - s^2 \equiv 1 \end{aligned}$$

2. Abbiamo appena dimostrato che $\bigcup_t \ell_t \subseteq S$. Dimostriamo adesso l'inclusione opposta. Sia $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Possiamo riscrivere questa condizione come

$$x_0^2 - z_0^2 = 1 - y_0^2$$

e scomponendo

$$(x_0 - z_0)(x_0 + z_0) = (1 - y_0)(1 + y_0)$$

Supponiamo che le quattro quantità in parentesi siano tutte diverse da 0. Allora possiamo scrivere

$$\frac{x_0 - z_0}{1 - y_0} = \frac{1 + y_0}{x_0 + z_0} = \lambda = \tan t_0$$

poiché ogni numero reale è la tangente di qualche angolo. Allora si ha

$$\frac{x_0 - z_0}{1 - y_0} = \frac{1 + y_0}{x_0 + z_0} = \frac{\sin t_0}{\cos t_0}$$

e moltiplicando si vede che $(x_0, y_0, z_0) \in \ell_{t_0}$.

Questo calcolo ci fa anche capire cosa fare quando una delle quantità fra parentesi è nulla: è il caso $t_0 = 0$ oppure $t_0 = \pi/2$. Sia infatti, per esempio, $x_0 + z_0 = 0$. Allora deve essere $1 + y_0 = 0$ oppure $1 - y_0 = 0$.

Nel primo caso si ha $x_0 = -z_0$, $y_0 = -1$ e questi punti soddisfano la seconda equazione di $\ell_t$ per ogni $t$ e soddisfano la prima equazione per $t_0 = \arctan(-z_0)$.

Nel secondo caso si ha $x_0 = -z_0$, $y_0 = 1$ e si vede subito che questi punti stanno sulla retta $\ell_t$ per $t = \pi/2$.

Procedendo analogamente nel caso $x_0 - z_0 = 0$ si vede che ogni punto si $S$ sta su almeno una retta $\ell_t$ e dunque $S = \bigcup_t \ell_t$.

Per dimostrare che un punto di $S$ è contenuto in una sola retta, basta dimostrare che le rette $\ell_t$ sono a due a due disgiunte. Per calcolare l'intersezione $\ell_t \cap \ell_u$ basta mettere a sistema le equazioni delle due rette: si ottiene un sistema di 4 equazioni in 3 incognite e per vedere che è incompatibile basta calcolare il determinante della matrice completa. Il sistema è

$$\begin{cases} \cos t\, x &+ \sin t\, y &- \cos t\, z &= \sin t \\ \sin t\, x &- \cos t\, y &+ \sin t\, z &= \cos t \\ \cos u\, x &+ \sin u\, y &- \cos u\, z &= \sin u \\ \sin u\, x &- \cos u\, y &+ \sin u\, z &= \cos u \end{cases}$$

e il determinante vale

$$-4(\cos t \sin u - \cos u \sin t)^2$$

che è nullo se e solo se $\tan t = \tan u$ e quindi $\ell_t = \ell_u$. Dunque per $\ell_t \neq \ell_u$ il sistema è incompatibile e le rette non si intersecano.

3. Abbiamo già risposto a questa domanda! La funzione che abbiamo usato per la parametrizzazione delle rette $\ell_t$

$$\mathbf{x}(t,s) = \begin{cases} x &= \sin 2t + (\cos 2t)s \\ y &= -\cos 2t + (\sin 2t)s \\ z &= s \end{cases}$$

può essere pensata come la parametrizzazione della superficie $S$ facendo variare sia $t$ (facciamo variare la retta) che $s$ (prendiamo tutti i punti sulla retta). Verifichiamo che sia una parametrizzazione regolare. La funzione è ovviamente differenziabile. Se restringiamo il dominio a $(0,\pi) \times \mathbb{R}$ è anche iniettiva, perché ogni punto sta su una sola retta. In questo modo non abbiamo la retta $\ell_0$, e occorre una seconda carta con dominio $(-\pi/2, \pi/2)$ per coprire l'intera superficie.

Le derivate parziali sono

$$\mathbf{x}_t = (2\cos 2t - 2s \sin 2t, 2\sin 2t + 2s\cos 2t, 0), \quad \mathbf{x}_s = (\cos 2t, \sin 2t, 1)$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_s = 2(\sin 2t + s\cos 2t)\,\mathbf{i} + 2(-\cos 2t + s\sin 2t)\,\mathbf{j} - 2s\,\mathbf{k}$$

Se $s \neq 0$ la componente $\mathbf{k}$ è diversa da 0. Se $s = 0$, il vettore diventa

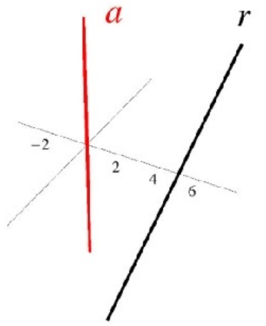
$$\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_s = 2\sin 2t\,\mathbf{i} - 2\cos 2t\,\mathbf{j}$$

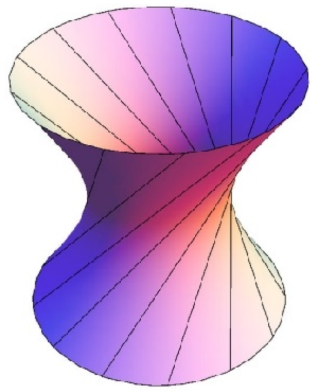
che è diverso da 0 perché seno e coseno di uno stesso angolo non sono mai nulli contemporaneamente. Dunque il differenziale ha rango 2 e poiché sappiamo che $S$ è una superficie dalla parametrizzazione della Lezione 16, che rappresenta $S$ come superficie di rotazione, possiamo concludere che $\mathbf{x}$ è un omeomorfismo sull'immagine e quindi una parametrizzazione regolare.

Le due parametrizzazioni sono ovviamente diverse. Osserviamo che anche questa parametrizzazione può essere pensata di rotazione, ma in modo diverso da come l'abbiamo definito in precedenza: stiamo facendo ruotare la retta $\ell_0 = (s, -1, s)$ intorno all'asse $z$. Questa retta è contenuta nel piano $y = -1$ e quindi non è complanare all'asse $z$, mentre gli esempi che abbiamo visto finora di superficie di rotazione erano ottenuti facendo ruotare curve nel piano $xz$ e cioè complanare all'asse di rotazione.

Due figure utili: (i link sono cliccabili in PDF)

dalle dispense di Laura Geatti, `http://www.mat.uniroma2.it/~gealbis/FIS/Geo2019home.html`



da Wikipedia `https://it.wikipedia.org/wiki/Superficie_rigata`

**Esercizio 1.2.** Consideriamo gli insiemi

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 z^2 = 1\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + z^6 = 1\}$$

Dimostrare che $S_1$ e $S_2$ sono superfici regolari. Dimostrare inoltre che $S_2$ è compatta, mentre $S_1$ non è compatta.

**Soluzione.** Entrambe le superfici sono superfici di livello e quindi basta dimostrare che 1 è un valore regolare. Per $S_1$, il differenziale della funzione è

$$df = (2x, 2yz^2, 2zy^2)$$

che si annulla per $x = y = 0$ e $x = z = 0$. In entrambi i casi il valore della funzione è 0 e quindi 1 è un valore regolare.

Per $S_2$, il differenziale della funzione è

$$df = (2x, 4y^3, 6y^5)$$

che si annulla per $x = y = z = 0$. In questo punto il valore della funzione è 0 e quindi 1 è un valore regolare.

Entrambe le superfici sono controimmagini di un punto e quindi sono sottospazi chiusi di $\mathbb{R}^3$. Per determinare la comattezza basta quindi studiare la limitatezza.

$S_1$ contiene punti della forma $(0, t, 1/t)$ e quindi non è limitata. Dunque non è compatta.

I tre addendi di $S_2$ sono positivi e la somma è 1: dunque ognuno è limitato superiormente da 1, cioè $x^2 \leq 1$, $y^4 \leq 1$, $z^6 \leq 1$. Quindi $S_2$ è contenuta nel cubo $[-1, 1]^3$ e quindi è limitata e perciò compatta.

**Esercizio 1.3.** Costruire un diffeomorfismo fra il cilindro circolare retto di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e il piano $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine.

**Soluzione.** Usiamo coordinate $(u, v)$ per $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ e coordinate $(x, y, z)$ per lo spazio $\mathbb{R}^3$ in cui sta il cilindro, che indichiamo con $S$. Entrambi gli insiemi possono essere visti come l'unione di infinite circonferenze.

$$\mathbb{R}^2 - \{0\} = \bigcup_{\rho > 0} C_\rho$$

dove $C_r = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \mid u^2 + v^2 = \rho^2\}$ mentre

$$S = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} C_r$$

dove $C_z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = r\}$. L'idea è quindi di far corrispondere queste circonferenze, trovando una funzione biettiva fra gli insiemi degli indici delle unioni, e cioè fra $(0, +\infty)$ e $(-\infty, +\infty)$ . La prima che viene in mente è il logaritmo

$$r = \log \rho$$

Scriviamo la funzione completa. Ponendo $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ dobbiamo mandare circonferenze di raggio $\rho$ in circonferenze di raggio 1 e quindi la funzione è data da:

$$f(u, v) = \left( \frac{u}{\rho}, \frac{v}{\rho}, \log \rho \right)$$

È definita da $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ a $\mathbb{R}^3$ e l'immagine è contenuta in $S$. Poiché il dominio è un aperto e $\rho > 0$, la funzione $f$ è differenziabile nel senso usuale.

Per dimostrare che è un diffeomorfismo, basta scrivere la funzione inversa:

$$g(x, y, z) = (xe^z, ye^z)$$

Notiamo che $g(x, y, z)$ è definita e differenziabile su tutto $\mathbb{R}^3$ e quindi la sua restrizione al cinidro $S$ è differenziabile. Osserviamo che $g$ è l'inversa di $f$ solo quando la restringiamo al cilindro $S$.