Geometria 3 – a.a. 2020/21
Esercizi per giovedì 4 marzo 2021

1 Esercizi

Esercizio 1.1. Sia $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza. Dimostrare che

$$\frac{d^3}{ds}\alpha = -k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b}$$

Esercizio 1.2. Sia $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza. Per ogni $r \in \mathbb{R}$ si consideri la curva

$$\alpha_r(s) := \alpha(s) + r\mathbf{b}(s)$$

dove $\mathbf{b}(s)$ è il vettore binormale di α. Dimostrare che

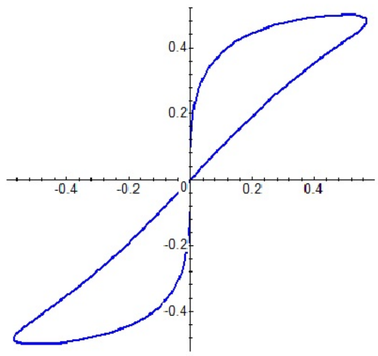
a. α_r è sempre una curva regolare. Calcolare la curvatura di α_r e determinare una condizione sufficiente su α affinché α_r sia biregolare

b. α è piana se e solo se il vettore binormale a α_r è $\pm\mathbf{b}$ (sotto l'ipotesi α_r biregolare)

Esercizio 1.3. Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t}{1+t^2} \right)$$

Dimostrare che è una parametrizzazione regolare iniettiva ma non un omeomorfismo con l'immagine.



Esercizio 1.4. Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\alpha(t) = \left(2\sqrt{2}\, t - \sin t, 2\sqrt{2} \sin t + t, 3 \cos t \right)$$

Dimostrare che la curva definita da α è un'elica circolare.

Esercizio 1.5. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza e supponiamo che $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. esistono due costanti $c, d \in \mathbb{R}$ non entrambe nulle tali che $ck + d\tau \equiv 0$
2. esiste un versore costante non nullo $\mathbf{v}_0$ tale che $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v}_0 \rangle$ è costante
3. esiste un piano H vettoriale tale che $\mathbf{n}(s) \in H$ per ogni $s \in I$. Questa condizione si può esprimere in modo equivalente come: esiste un vettore non nullo costante $\mathbf{v}$ tale che $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{v} \rangle \equiv 0$.
4. esiste un versore costante non nullo $\mathbf{v}_0$ tale che $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{v}_0 \rangle$ è costante
5. la curva α ha una parametrizzazione della forma

$$\alpha(s) = \eta(s) + (s - s_0)\, \mathbf{v}$$

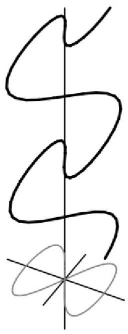
dove η è una curva piana parametrizzata per arcolunghezza e $\mathbf{v}$ è un vettore costante ortogonale al piano contenente il sostegno di η

Suggerimento: dimostrare le catene di implicazioni

$$(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (1) \qquad \text{e} \qquad (2) \implies (5) \implies (1)$$

Una curva α soddisfacente una qualsiasi di queste condizioni equivalenti è detta elica (generalizzata) (vedi figura). Esprimere infine curvatura, torsione e triedro di Frenet di α in funzione della curvatura e del triedro di Frenet di η.

Osservazione. L'ipotesi sulla torsione forse non è necessaria. È semplice vedere che tutte le condizioni tranne la (4) implicano che la torsione non è mai nulla. Forse si può dimostrare che anche la (4) implica che la torsione non è mai nulla, ma non ci sono riuscito. L'ipotesi sulla torsione si usa solo nella dimostrazione di (4) $\Longrightarrow$ (1) e la rende piuttosto semplice.



Esercizio 1.6. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza con curvatura k e torsione τ. Dimostrare che la curvatura k_1 dell'indicatrice delle tangenti di α è tale che

$$k_1^2 = 1 + \frac{\tau^2}{k^2}$$